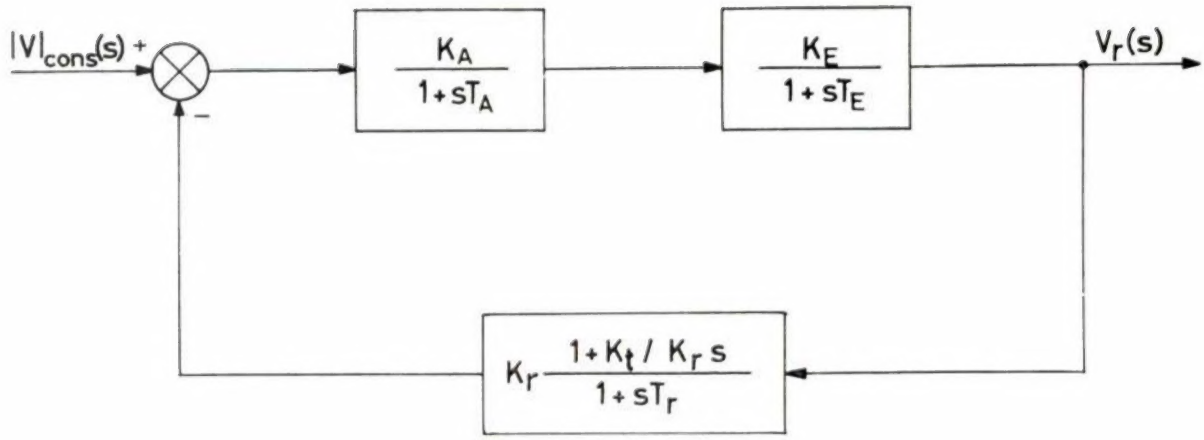


Fig. 7
La boucle simplifiée du système de réglage de tension

consigne de puissance donnée aux deux groupes par un signal, fonction de l'écart entre l'«Équivolume» et le volume d'eau mesuré qui existe dans le canal d'amenée.

Le volume d'eau à la côte 574.80, appelé «Équivolume» est le suivant:

— canal de fuite de Curbans + retenue de la Saulce + canal de Sisteron	9 M
— canal de Sisteron, seul	5,75 M

La consigne de puissance non corrigée, aussi connue comme tèrme d'anticipation, peut avoir trois sources differentes, les trois modes de fonctionnement sont designés par P_a.

En marche normale, cette consigne de puissance (non corrigée) est le débit turbiné à l'nsine de Curbans. Ce mode de fonctionnement est désigné par «Puissance Curbans», P_{cu}.

Éventuellement on peut utiliser un générateur de signaux de 0 à 10 mA (5 échalons par groupe) associé à un programmateur de 24 h. Ce mode de fonctionnement est désigné par «Programme», P_{ro}.

On peut aussi télécommander, depuis le P.C.H. de S.te Tulle. Ce dernier mode est désigné par «Télécommande globale», P_{tele}.

Le correcteur d'équivolume associé au terme d'anticipation donne un signal de consigne puissance globale, P_g. Ce signal est obtenu à partir d'un signal «Mesure niveaux», resultat de trois mesures de niveau en differents points du canal d'amenée de Sisteron:

h_1 — niveau d'eau de la chambre d'eau

h_2 — niveau d'ean au point de basculement (de l'aval vers l'amont)

h_3 — niveau d'eau de la retenue de la Saulce

Le terme «Équivolume mesure», E_m, est donné par:

$$E_m = 2\ h_1 + 4\ h_2 + 4\ h_3$$

En secours, E_m sera donné par la mesure de h_1 et une fonction elaborée à partir du terme d'anticipation, P_a, avec $h_{1m} = h_1$ mesuré et $h_{1r} = f(P_a)$, référence équivolume théorique.

Le signal résultant de consigne de puissance globale doit être réparti sur chacun des deux groupes.

2.1.1. Consigne de puissance globale

2.1.1.1. Choix du groupe prioritaire et fonctionnement normale

Un des deux groupes est choisi comme prioritaire et sur celui-ci le répartiteur de consigne aiguillera le signal de consigne globale entre O et une valeur P_s, réglable entre 40 et 50% de la puissance globale que peut turbiner l'usine. Pour une valeur supérieure à ce seuil réglable, la consigne globale est répartie également sur chacun des deux groupes avec une temporisation qui permet d'éviter des battements au voisinage de ce seuil réglable.

2.1.1.2. Choix d'une consigne de puissance fixe pour un groupe

Pour une demande constante de puissance, P_c, ou utilise un potentiomètre de commande manuelle aiguillé sur le groupe prioritaire; la correction d'équivolume est prise en charge par le groupe «Non prioritaire» à partir de la valeur $P_g - P_c$.

2.2. Puissance réartive (Q):

Deux modes de fonctionnement sout utilisés:

— en marche normale, par télécommande individuelle du P.C.H. de S.te Tulle, groupe par groupe (Qc_1 et Qc_2);
— en utilisant un programmanteur MBO associé à un générateur de signaux à 9 échalons, entre —5 et +5 mA avec une variation de 1,25 mA entre chaque échalon, et à un répartiteur de consigne.

Le demarrage du groupe travaillant comme compensateur synchrone est fait par une commande séparée.

3. Régulateurs

3.1. Régulateur pour la turbine

Le régulateur pour la turbine comprend:

— le régleur;
— les organes de mesure fournissant les signaux d'asservissement au régleur;
— les organes de réglage exécutant les ordres elaborés par le régleur (actionneur, distributeur, servomoteur de réglage de l'organe d'admission d'eau dans la turbine).

3.1.1. Régleur (voir fig 9)

Le régleur est destiné à commander, par l'intermédiaire d'une chaîne hydraulique, l'organe de réglage de la turbine Francis.

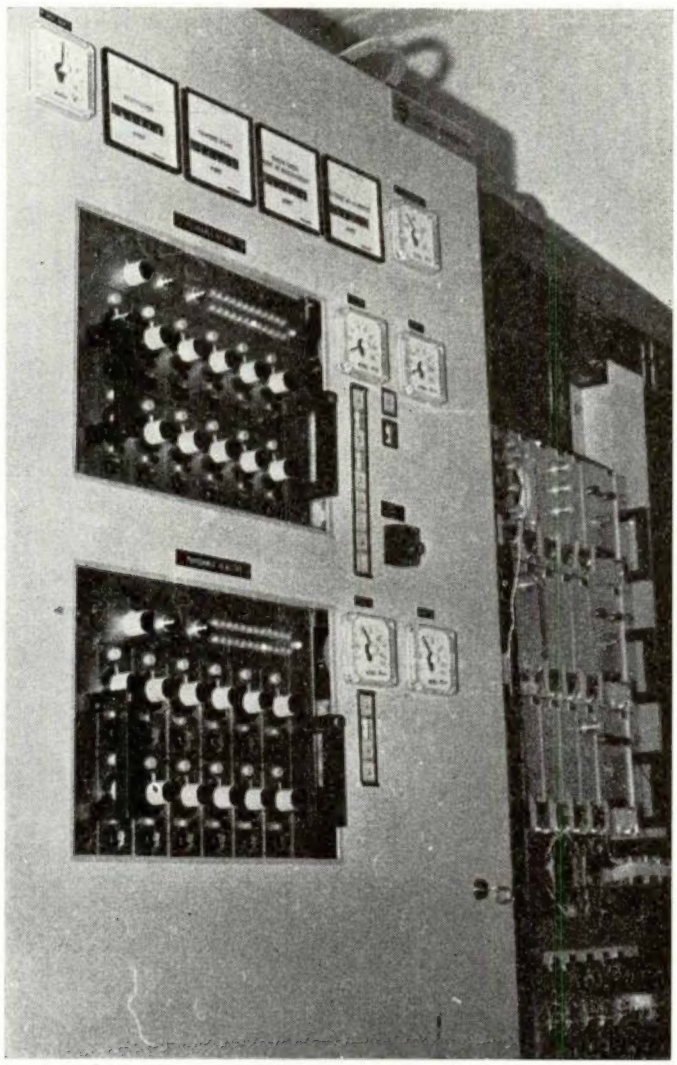


Fig. 8
Programmateur MBO de consignes dans le bâtimen de commande

RÉGULATEUR POUR LA TURBINE
Schéma fonctionnel de l'ensemble électronique et hydraulique

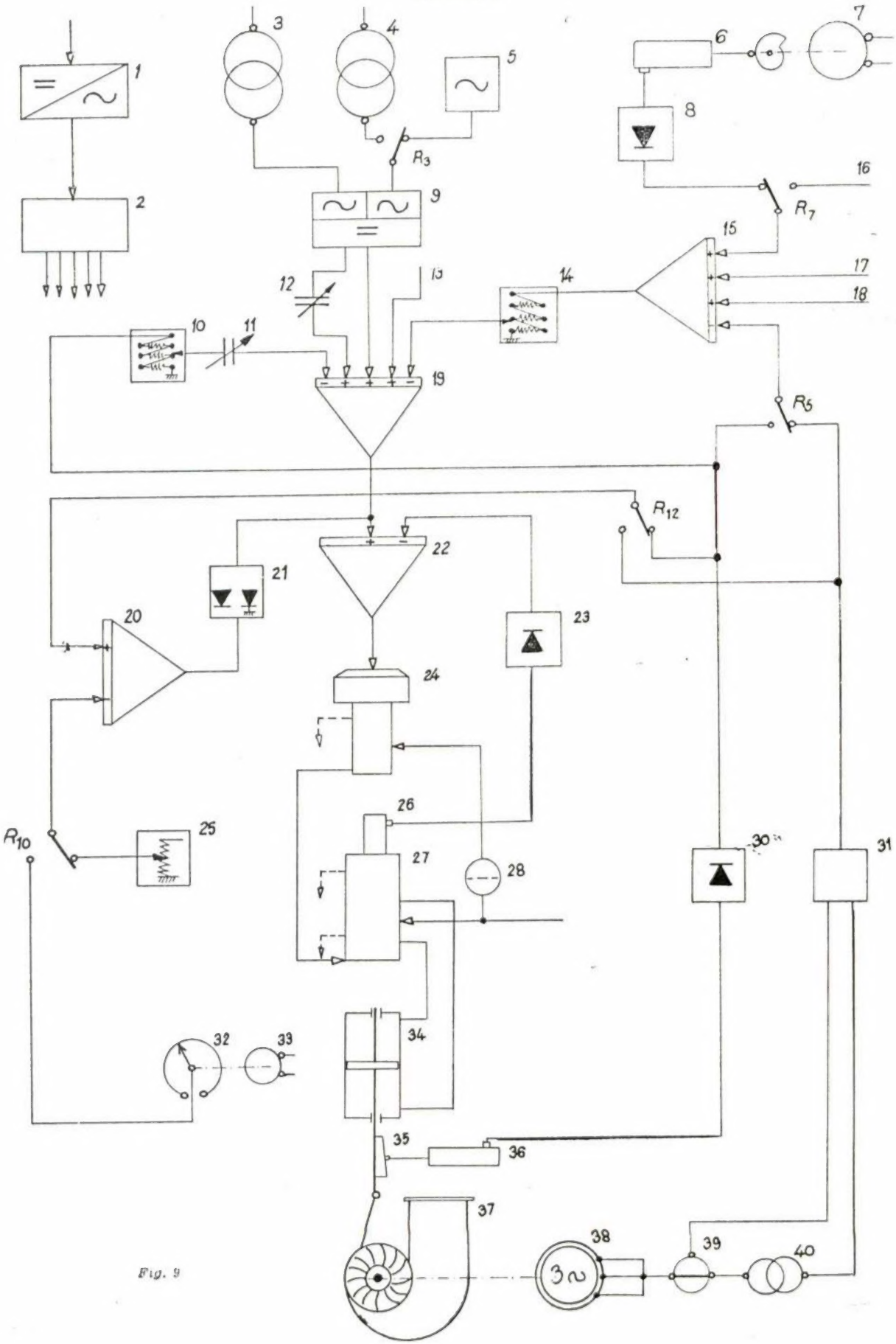


Fig. 9

Ce régleur électronique realise une régulation par action P.I.D. (proportionelle, intégrale et derivée) et l'emploi des amplificateurs opérationnels à circuit integré permet un découplage de tous les circuits et un filtrage efficace. L'alimentation du régleur est faite à partir des batteries d'accumulateurs de la centrale d'où l'independance par rapport à la fréquence du groupe, assurant ainsi une alimentation normale des circuits électroniques même pendant les fonctionnements spéciaux du groupe (disjonction, fonctionnement en déchargeur, marche hyposynchrone, etc.). Les batteries alimentent le moteur du dispositif de réglage «charge-fréquence» et, éventuellement, du limiteur d'ouverture ou de puissance, et aussi le convertisseur statique de 150 VA-400 Hz-127 V ± 1%, délivrant une tension alternative qui assure l'alimentation des différents transformateurs du régleur, des variomètres d'asservissement, du transducteur wattmétrique. Ce convertisseur est protegé contre les surtensions.

L'information sur la fréquence est prise sur un transformateur de tension de l'alternateur, et les circuits de synchronisation en fréquence sont inclus dans le régleur.

Les paramétres de réglage peuvent être modifiés pendant la marche du groupe.

Avec ce régleur l'alternateur pilote a été supprimé, ce qui permet la mise sous tension du régleur avant le démarrage du groupe et ainsi, d'avoir des signaux de réglage cohérents à partir de la frèquence nulle, dispensant de cette façon les circuits supplémentaires utilisés uniquement pour le démarrage.

1. Convertisseur statique
2. Répartiteur de tension
3. T. T. Groupe
4. T. T. Réscau
5. Quartz étalon de fréquence
6. Variomètre de charge-fréquence
7. Moto-réducteur
8. Détection
9. Circuit fréquencemétrique
10. Réglage du statisme transitoire
11. Réglage du T_r du statisme transitoire
12. Réglage du T_v de l'accéléromètre
13. Ordre extérieur
14. Réglage du statisme permanent
16. Sommateur
16. Programme
17. Téléréglage
18. Ordre extérieur
19. Sommateur général
20. Comparateur limiteur
21. Circuit limiteur
22. Amplificateur de puissance
23. Détection
24. Actionneur
25. Polarisation de marche à vide
26. Variométre d'asservissement du distributeur
27. Distributeur hydraulique
28. Filtre à huile
29. Alimentation en huile
30. Détection
31. Transducteur wattmétrique
32. Poténtiométre de consigue du limiteur d'ouverture
33. Moto-réducteur
34. Servo-moteur
35. Came
36. Variométre d'asservissement servo-moteur
37. Turbine
38. Alternateur
39. T. I. Alternateur
40. T. T. Alternateur

R_3. Relais de synchronisation
R_5. Choix asservissement à la puissance ou à l'ouvertur
R_7. Programme ou charge fréquence
R_{10}. Au repos avant couplage
R_{12}. Choix limiteur d'ouverture ou de puissance

3.1.2. Circuits sensibles à la fréquence du groupe

3.1.2.1. Circuit fréquencemétrique (voir fig. 11)

Le circuit fréquencemétrique comprend deux dispositifs parallèles:

— un est commandé par un étalon de fréquence à quartz, signal de consigne;
— l'autre est commandé par la fréquence du groupe à régler.

Le signal fréquencemétrique résulte de la comparaison des signaux issus de ces deux dispositifs, qui doivent être égaux et de signe contraire à l'équilibre.

Sur chaque dispositif, la tension alternative est transformée en créneaux calibrés qui sont en suite dérivés.

Le circuit de dérivation est conçu de façon a obtenir des impulsions négatives de fréquence de récurrence, double de la fréquence d'entrée. Ces impulsions commandent un circuit monostable, dont le temps de relaxation est légérement inférieur à 5 ms. Le signal à la sortie de ce circuit commande, par l'intermédiaire d'un conformateur de découplage, un transistor haute tension qui bloque et débloque une diode. On obtient ainsi un créneau de tension rectangulaire d'amplitude constante, de largeur correspondant au temps de relaxation du monostable et de fréquence double de celle du signal d'entrée. Ce signal est ensuite intégré et filtré. Finallement on oppose les deux signaux issus des deux dispositifs parallèles.

Le signal fréquencemétrique obtenu agit sur une entrée du sommateur général d'une part, et l'accéléromètre d'autre part. Il fournit aussi le signal de téléindication de la fréquence au tableau général et commande huit bascules électroniques de fréquence. Six de ces bascules sont utilisées dans les divers circuits de commande séquentielle du groupe, tandis

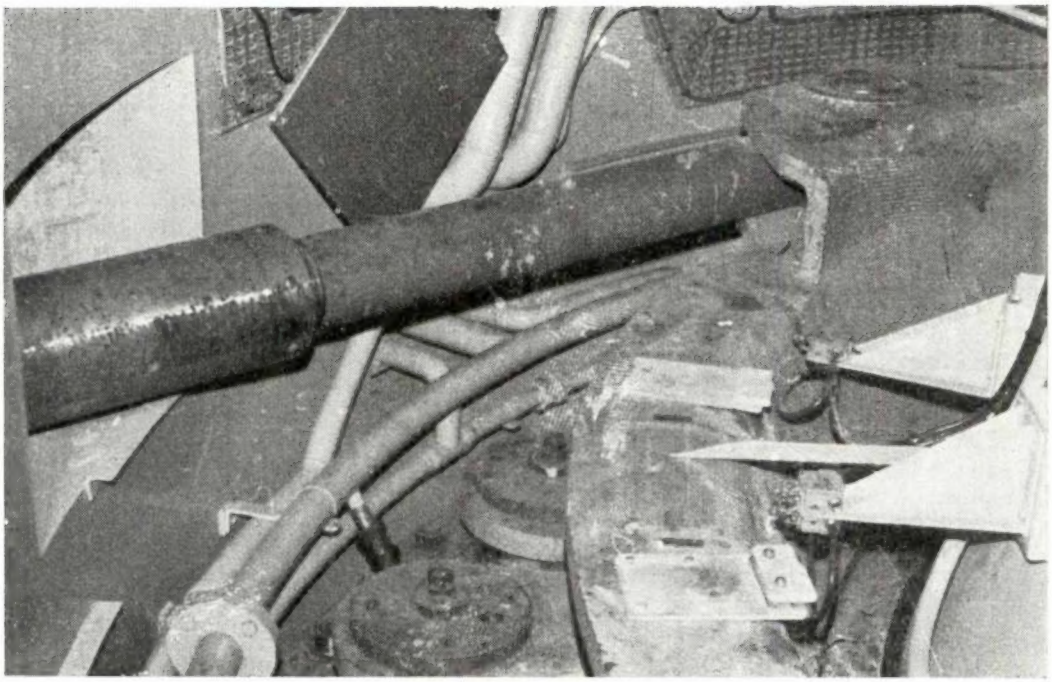


Fig. 10
Servomoteur de réglage de l'organe d'admission d'eau dans la turbine, et came

que les deux autres servent à la mise en service du coupleur.

Le circuit fréquencemétrique est insensible aux taux d'harmoniques et au niveau de la tension qui l'attaque car de 0,2 V à 220 V, le magnétisme rémanent du rotor est suffisant pour donner la tension minimale nécessaire lorsque l'alternateur n'est pas excité.

3.1.2.2. Synchronisation en fréquence (voir fig. 9)

La synchronisation du groupe en fréquence avant le couplage est fait en utilisant le circuit fréquencemétrique dans lequel un relais R_3 commute la fréquence du réseau à la place du signal du quartz étalon de fréquence.

Le signal continu élaboré permet de réaliser une synchronisation, en fréquence rapide quelle que soit la fréquence du réseau.

3.1.2.3. Accéléromètre

Le circuit accélérométrique élabore un signal proportionnel à la derivée par rapport au temps du signal fréquencemétrique, donc à l'accélération angulaire du groupe.

3.1.2.4. Réglage charge-fréquence (voir fig. 9)

Un variomètre est entraîné par un groupe moto-réducteur à came. Quand la synchronisation des groupes n'est pas automatique, le variomètre fourni une tension qui permet de faire varier la fréquence du groupe en marche à vide de 45 Hz à 55 Hz. Après le couplage, le même système permet de prendre la charge sur le groupe de 0 à 111 % de la puissance nominale, si la fréquence du réseau est identique à la fréquence de consigne, quel que soit le statisme permanent affiché.

3.1.3. Asservissements (voir fig. 9)

3.1.3.1. Asservissement permanent

L'asservissement permanent peut être réalisé indifférement à la puissance du groupe ou à l'ouverture. Le choix du type d'asservissement est déterminé par la position du relais R_5.

— asservissement à la puissance:

dans ce cas un transducteur wattmétrique, fournit un signal (0 à 10 mA ou 0 à 10 V) proportionnel à la puissance active de l'alternateur du groupe. Un filtrage adéquat élimine les fluctuations rapides et gênantes de la puissance de l'alternateur. Ce signal est utilisé, d'une part, pour réaliser l'asservissement à la puissance, et d'autre part, comme indication de la puissance du groupe pour la limitation en puissance. La consigne de puissance est issue du dispositif de réglage de charge ou d'un ordre extérieur (programmètre, etc...)

— asservissement à l'ouverture:

dans ce cas la tension d'asservissement est issue d'un variomètre qui, monté sur le servomoteur de commande de l'organe d'admission d'eau de la tur-

CIRCUIT FRÉQUENCEMÉTRIQUE
Schéma synoptique

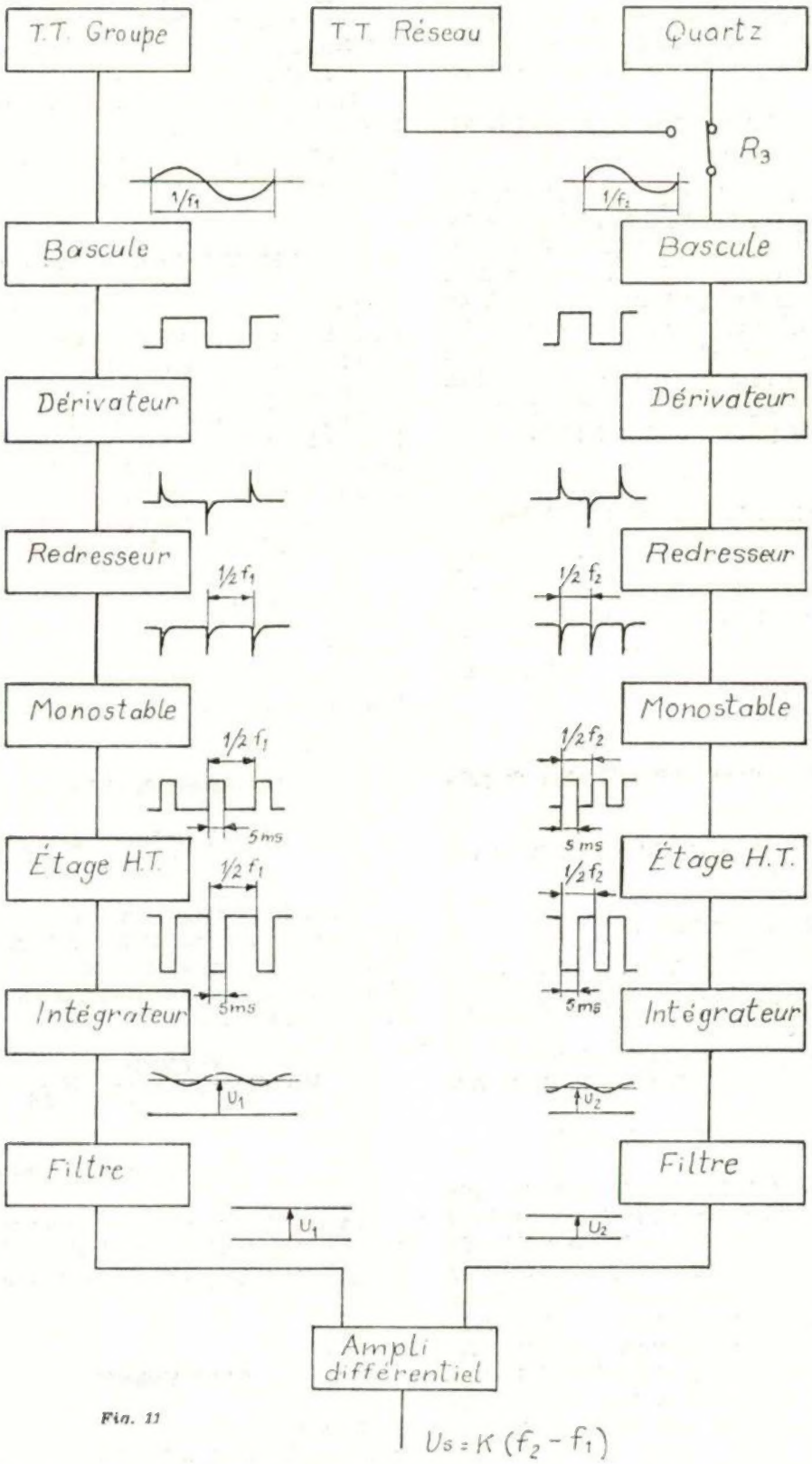


Fig. 11

f_1 — fréquence du groupe
f_2 — » de référence

bine détecte la position d'ouverture de celui-ci. Cette tension est aussi utilisée:

— pour réaliser l'asservissement transitoire:
— comme indication de la position d'ouverture de la turbine pour le circuit limiteur d'ouverture;
— comme signal pilote pour la commande des systèmes copiants.

Un premier sommateur permet d'obtenir une tension continue proportionelle à la différence entre la valeur de consigne (issu du dispositif de réglage de charge ou du circuit extérieur: programmètre, etc...) et la valeur du signal d'asservissement. Ce sommateur peut aussi recevoir d'autres ordres extérieurs, comme par exemple les signaux de téléréglage. Le signal de sortie de ce sommateur est atténué en fonction du statisme permanent fréquence-puissance de 0 à 6 % affiché par un sélecteur à plots.

3.1.3.2. Asservissement transitoire

Le degré d'asservissement transitoire est réglable de 10 à 60 % par l'intermédiaire d'un sélecteur à plots, soutirant sur le variomètre d'asservissement permanent, une tension variable de 0 à ± 10 V. La constante de temps T_r du circuit de dérivation est réglable de 0 à 4 secondes.

3.1.4. Les sommateurs et l'amplificateur de puissance

Il y a un sommateur général qui reçoit sur ces entrées: (voir fig. 9).

— le signal fréquencemétrique
— le signal accélérométrique
— le signal d'écart entre la consigne de charge et le signal d'asservissement en puissance ou à l'ouverture
— le signal d'asservissement transitoire
— le signal de commande manuelle de la fréquence
— le signal d'ordre extérieur éventuel

Le signal d'écart de la sortie du sommateur général est amplifié en provocant la formation d'une force électromagnétique dans la bobine mobile de l'actionnateur, qui commande le déplacement du tiroir pilote. Celui-ci provoque alors le déplacement du tiroir de distribuition. L'asservissement de ce tiroir est realisé électriquement en utilisant un variomètre. Le signal de cet asservissement est introduit à l'entrée de l'amplificateur de puissance; cette boucle secondaire permet le réglage du gain de l'étage hydraulique.

Il y a un deuxième sommateur qui reçoit sur ses entrées:

— le signal de commande du copiage elaboré par le variomètre du charge-fréquence;
— le signal d'asservissement du tiroir distributeur de la chaîne de copiage;
— le signal d'asservissement du servomoteur de la chaîne de copiage.

Le signal de sortie est amplifié et agit sur la bobine de l'actionneur.

En régime permanent les tensions de sortie des deux sommateurs sont nulles.

3.1.5. Limitation d'ouverture ou de puissance

Le choix limiteur d'ouverture ou de puissance est fait en utilisant un relais de commutation (R_{12} dans le schéma, fig. 9), selon le signal issu du variométre d'asservissement ou du transducteur wattmétrique. Avant le couplage une polarisation fixe détermine l'ouverture de marche à vide. Un relais R_{10}, de commutation, permet l'utilisation de la tension issue d'un potentiomètre, de positionnement réglable manuellement, en limitant l'ouverture ou la puissance maximales tolerées sur le groupe. Cette tension est reçue sur l'entrée d'un circuit comparateur, en opposition avec le signal antérieur. Un circuit limiteur empêche une ouverture ou une puissance supérieures à celles pré-determinées sur le limiteur. Un autre relais permet le fonctionnement en limiteur de fermeture, si le groupe marche comme déchargeur.

3.1.6. Organes de réglage

3.1.6.1. Transducteur electro-hydraulique ou «actionneur»

L'actionneur réalise un changement electro-hydraulique délivrant un débit d'huile proportionnel à un signal électrique de commande avec un grand gain et une faible constante de temps, et avec une fonction de transfert simplifiée:

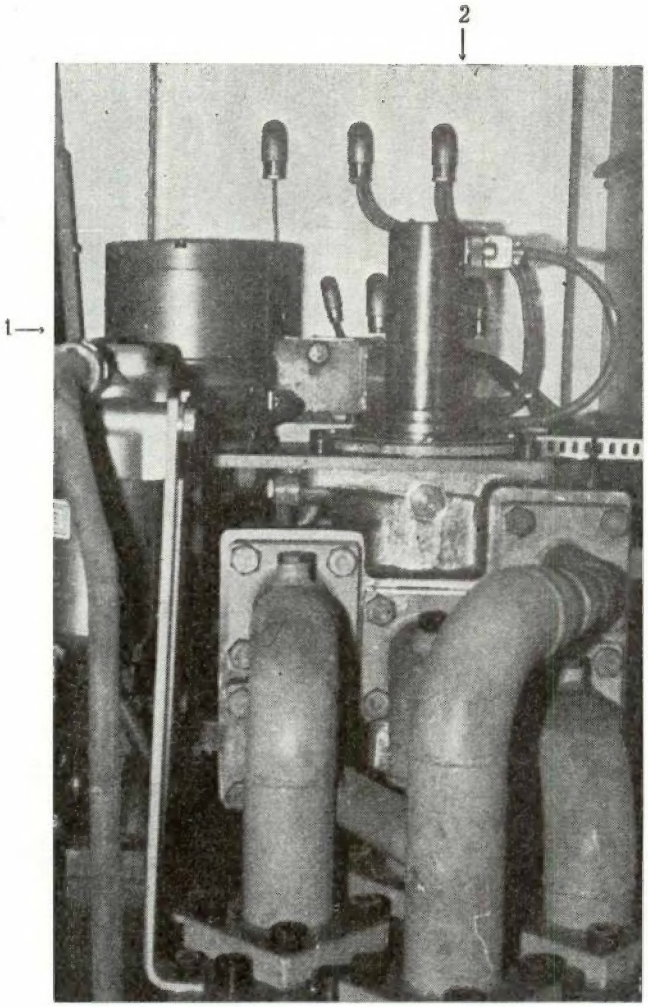
$$U(s) = \frac{Q \text{ (débit)}}{I \text{ (intensité)}} = K \frac{1}{1+sT}$$

3.1.6.2. Distributeur hydraulique

Le distributeur effectue une amplification hydraulique dans la chaîne de régulation fournissant la puissance hydraulique pour manœvreur le servomoteur.

3.1.6.3. Variomètre

Le variomètre réalise une fonction de transfert déplacement-tension, suivant la tension à la sortie fonction lineaire du déplacement détecté par l'appareil.



1 — «Actionneur» ou Transducteur Electro-Hydraulique
2 — Variomètre d'asservissement du distributeur
3 — Distributeur hydraulique

Fig. 12

3.1.7. Fonction de transfert du régulateur pour la turbine (voir fig. 13)

L'expression du statisme permanent est:

$$m = \frac{b.\,Y_o}{a.\,F_o}\,Ast$$

et celle du statisme transitoire:

$$\vartheta = \frac{b.\,Y_o}{a.\,F_o}\,Ad$$

L'expression pour la constante de temps tiroir-pilote + servomoteur du distributeur est:

$$\tau_1 = \frac{T_{i_1}}{b'.\,As.\,G.\,g^o}$$

τ_1 — constante de temps servomoteur du distributeur asservi (en secondes)

T_{i_1} — constante de temps d'intégration pure tiroir pilote + servomoteur du distributeur (en secondes)

et pour la constante de temps tiroir distributeur + + servomoteur principal:

$$\tau_2 = \frac{T_2}{m} = T_{i2}\,\frac{b'.\,As}{b.\,Ast}$$

avec:

$$T_2 = T_{i_2}\,\frac{b'.\,As.\,Y_o}{a.\,F_o} = \frac{b'.\,As}{a.\,F_o\;\alpha\,\gamma\,\pi\,D\sqrt{2g\,(P\text{-}P_2)}}$$

τ_2 — constante de temps servomoteur principal asservi (en secondes)

T_2 — constante de temps servomoteur principal asservi avec m=1 (en secondes)

T_{i2} — constante de temps d'intégration pure tiroir-distributeur + servomoteur principal (en secondes)

V — cylindrée du servomoteur: $V = SY_o$

S — section du servomoteur (cm^2)

Pour un ensemble tiroir distributeur + servomoteur:

$$T_{i_x} = \frac{S}{\alpha . \gamma . \pi . D \sqrt{2g . (P - P_x)}}$$

α — pourcentage de périphérie utile au tiroir de distribuition

γ — coefficient de contraction

D — diamètre du tiroir de distribution (cm)

g — accélération de la pesanteur (cm/s^2)

P — P_x — perte charge dans un collet de distribution (cm)

RÉGULATEUR POUR LA TURBINE

Déplacement du servomoteur principal

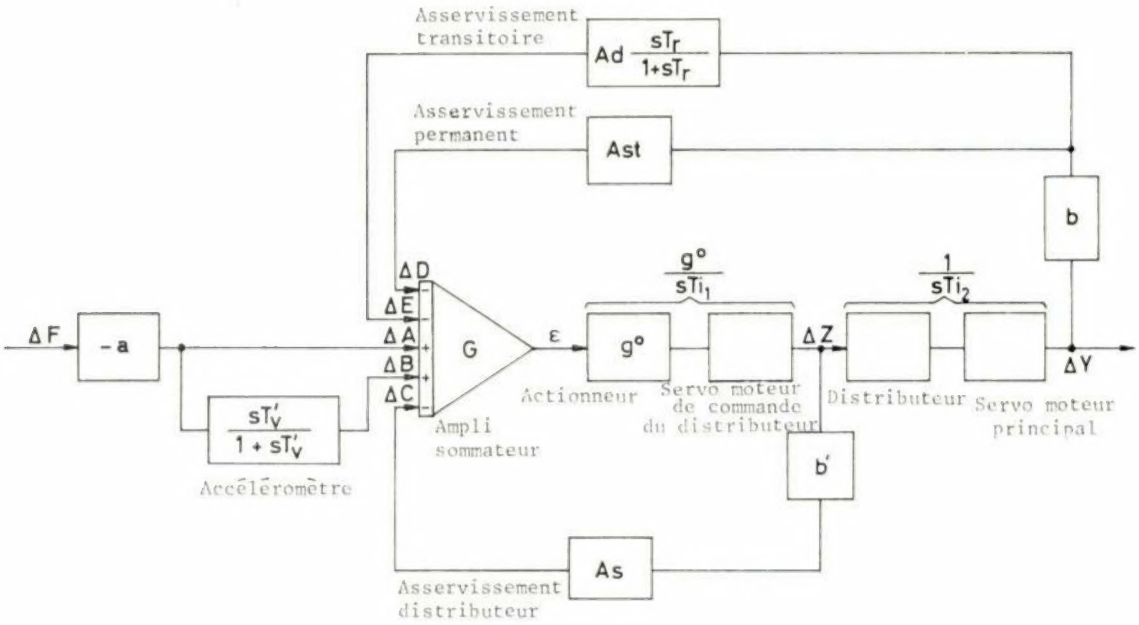


Figure 13

— a	Sensibilité du circuit fréquencemétrique (V/Hz)
b	Sensibilité du capteur de position du piston du S. M. principal (V/mm)
b'	Facteur de conversion du déplacement du tiroir distributeur en tension (V/mm)
As	Coefficient d'atténuation de l'asservissement du distributeur hydraulique (s. dim.)
Ast	Coefficient d'atténuation de l'asservissement permanent (sans dimension)
Ad	Coefficient d'atténuation de l'asservissement transitoire (sans dimension)
F_o	Fréquence nominale (Hz)
$\triangle F$	Écart de fréquence (Hz)
G	Gain en tension de l'amplificateur électronique (sans dimension)
g^o	Sensibilité de l'actionneur (mm/V)
s	Variable de Laplace
T_{i1}	Temps d'intégration tiroir-pilote — Servomoteur de commande du distributeur
T_{i2}	Temps d'intégration tiroir distributeur — Servomoteur principal (s)
T_r	Temps de relaxation de l'asservissement transitoire (s)
T'_v	Constante de temps du circuit dérivateur de l'accéléromètre (s)
T_v	Temps accélérométrique (s): $T_v = 2\,T'_v$
ϵ	Écart de régulation à l'entrée de l'actionneur (V)
Y_o	Course totale du piston du servomoteur principal (mm)
$\triangle Y$	Déplacement du piston du servomoteur principal (mm)
$\triangle Z$	Déplacement du tiroir distributeur (mm)

Le signal à la sortie du sommateur général c'est l'écart de régulation ϵ résultant du:

— signal fréquencemétrique

$$\triangle A = - a \triangle F$$

— signal accélérométrique

$$\triangle B = \frac{sT'_v}{1+sT'_v} \triangle A = - a \frac{sT'_v}{1+sT'_v} \triangle F$$

$$\triangle A + \triangle B = - a \frac{1+sT_v}{1+sT_v/_2} \triangle F$$

— signal d'asservissement du distributeur

$$\triangle C = b'. As. \triangle Z$$

— signal d'asservissement permanent

$$\triangle D = b. Ast. \triangle Y$$

— signal d'asservissement transitoire

$$\triangle E = b. Ad. \frac{sT_r}{1+sT_r} . \triangle Y$$

$$\epsilon = G (\triangle A + \triangle B - \triangle C - \triangle D - \triangle E)$$

$$\triangle Z = \frac{g^o}{sT_{i_1}} \varepsilon$$

$$\triangle Y = \frac{1}{sT_{i_2}} \triangle Z$$

en éliminant ϵ et $\triangle Z$ entre ces trois dernières équations, on obtient:

3.2. Régulateur pour l'alternateur (voir fig. 14)

Le système de réglage de tension de chaque alternateur à l'usine de Sisteron comprend deux dispositifs de commande, un automatique et un autre manuelle.

En principe les deux dispositifs sont tout à fait pareils, avec la différence que comme grandeur réglée on utilise la tension de l'alternateur pour le commande automatique, et la tension d'alimentation de l'inducteur de l'excitatrice pour le manuelle.

Un amplificateur de réglage livre à la sortie une tension proportionelle à l'écart entre la tension fournie et la tension de consigne. Il comprend un convertisseur de la valeur de consigne, un circuit donnant cette valeur et un amplificateur P.I.D. (proportionelle, intégrale et derivée). La tension issue de l'amplificateur commande les circuits de formation des impulsions de commande dirigées à un système de puissance à thyristors.

Les tensions par phase de l'alternateur sont amenées par des transformateurs de tension aux entrées du régulateur ($U_{cnom} = 110$ V).

Entre chaque phase on branche en série une résistance variable de faible valeur ohmique, et l'enroulement primaire d'un transformateur de courant, de telle façon qu'on peut additionner vectoriellement aux tensions composeés une tension dépendante du déphasage et de l'amplitude de ce courant qui passe dans l'enroulement. Ce circuit de compensation permet la commande de la fourniture ou de l'absorbtion d'énergie réactive selon les variations de la tension du réseau. En décalant cycliquement les courants d'entrée on peut réaliser une compensation en fonction de la charge active livrée ou absorbée.

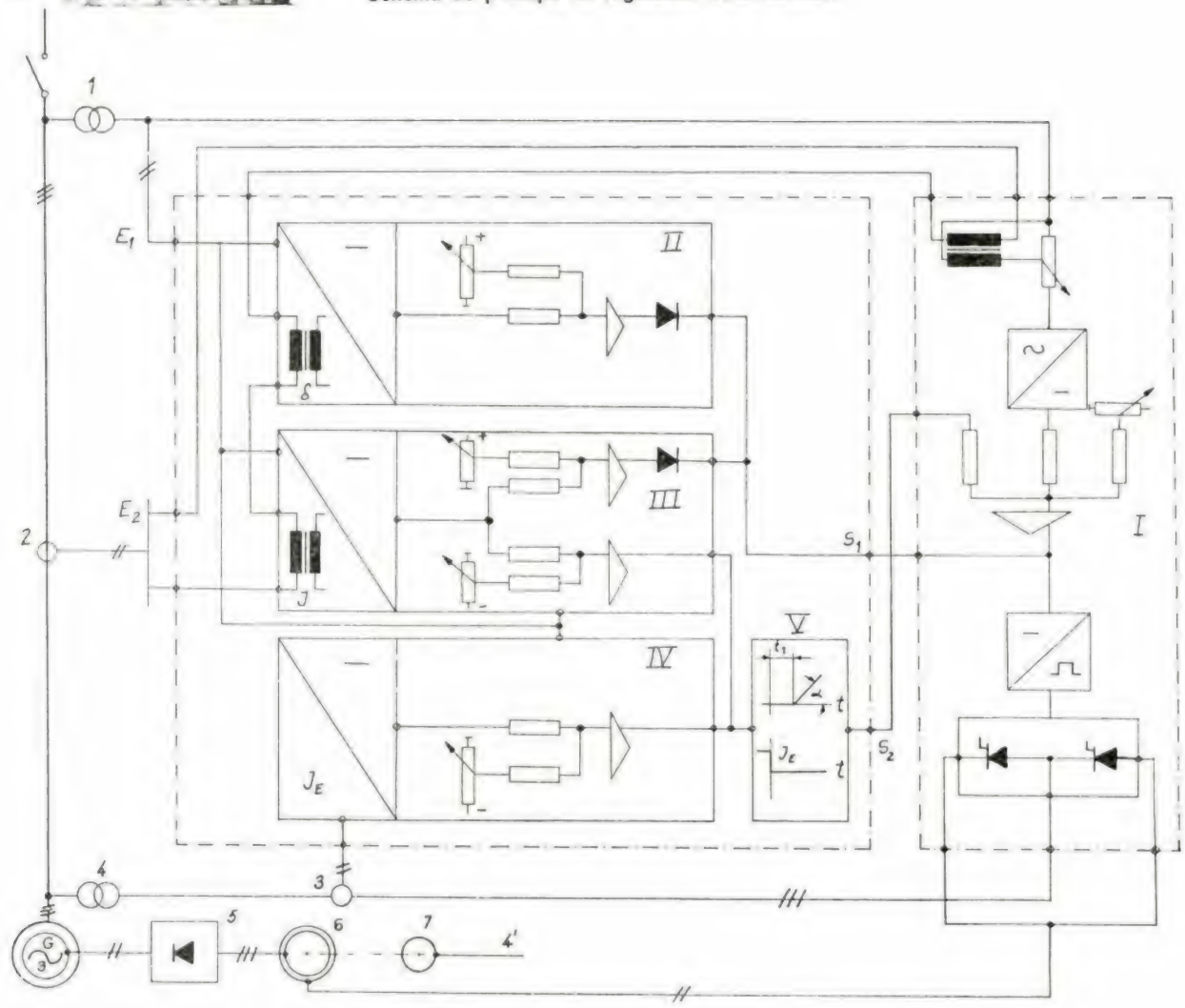
$$\left[1 + \left(\frac{b'.As}{b. Ast} T_{i_2} + T_r + \frac{Ad}{Ast} T_r \right) s + \left(\frac{T_{i_1} T_{i_2}}{G. g^o.b.Ast} + \frac{b'.As}{b.Ast} T_{i_2} T_r \right) s^2 + \frac{T_{i_1} T_{i_2} T_r}{G. g^o.b.Ast} s^3 \right] \triangle Y =$$

$$= - \frac{a}{b. Ast} \cdot \frac{1 + s T_v}{1 + s T_{v/2}} \left(1 + s T_r \right) \triangle F$$

$$U(s) = \frac{\triangle Y(s)}{\triangle F(s)} = - \frac{1}{m} \cdot \frac{\left(1 + s T_r\right)\left(1 + s T_v\right)}{\left(1 + s T_{v/2}\right)\left[1 + T_r \left(1 + \frac{\vartheta}{m} + \frac{\tau_2}{T_r}\right) s + \tau_2 \left(\tau_1 + T_r\right) s^2 + \tau_1 \tau_2 T_r s^3\right]}$$

RÉGULATEUR DE TENSION

Schéma de principe du régulateur avec limiteurs



I.	Régulateur de tension avec organe de réglage à thyristors	7.	Excitatrice pilote
II.	Limiteur d'angle de décalage interne	4'.	Source d'alimentation pour le régulateur
III.	Limiteur de courant statorique	E_1.	Entrée de la tension mesuré
IV.	Limiteur de courant rotorique	E_2.	Entrée du courant mesuré
V.	Intégrateur avec temps mort	S_1, S_2.	Sorties
1.	Transformateur de mesure pour la tension	J.	Courant statorique
2.	Transformateur de mesure pour le courant statorique	J_E.	Courant rotorique
3.	Transformateur de mesure pour le courant rotorique	t_1.	Temps mort de l'intégrateur
4.	Transformateur pour l'alimentation de l'organe de réglage	α.	Gradient d'acroissement de l'intégrateur
5.	Redresseurs tournants	δ.	Angle de décalage interne
6.	Excitatrice principale		

Figure 14

3.2.1. Limiteurs de courant d'excitation pour l'alternateur

Associés au régulateur de tension on utilise les limiteurs de courant d'excitation qui agissant sur celui-ci, déterminant ainsi le courant d'excitation.

3.2.1.1. Limiteur de courant rotorique (voir fig. 14)

Le limiteur de courant rotorique intervient pour diminuer le courant d'excitation en régime surexcité. Dans ce limiteur le courant d'excitation est transfor-

mé en une tension continue proportionelle, comparé à une valeur de consigne, amplifié et dirigé à l'entrée du régulateur de tension, en utilisant un intégrateur.

3.2.1.2. Limiteur de courant statorique (voir fig. 14)

Le limiteur de courant statorique limite le courant statorique inductif par une diminution du courant d'excitation en régime surexcité, et le courant statorique capacitif par une augmentation du courant d'excitation en régime sousexcité. Dans ce limiteur le courant de l'alternateur est transformé en une tension continue équivalente polarisée positivement ou négativement selon le domaine d'excitation, surexcitation ou sousexcitation. Cette tension est comparée à une valeur de consigne; le signal à la sortie du comparateur est amplifié par deux amplificateurs séparés. Un des amplificateurs, qui traite le courant statorique inductif, agit, par l'intermédiaire d'un intégrateur à temporisation, l'entrée de réglage du régulateur pour diminuer le courant d'excitation; l'autre amplificateur, qui traite le courant statorique capacitif, agit, par l'intermédiaire d'une diode de découplage, sur le régulateur pour augmenter le courant d'excitation.

3.2.1.3. Limitateur d'angle de déclage interne (voir fig. 14)

Le limiteur d'angle de décalage interne limite l'angle de décalage en charge de la machine à une valeur admissible. La tension de roue polaire et la tension de réseau sont transformées en impulsions rectangulaires et soustraites les unes des autres dans un amplificateur. A la sortie de cet amplificateur il y a une suite d'impulsions, dont la valeur moyenne est proportionelle à l'angle de décalage interne; l'amplificateur de réglage reçoit sur son entrée cette valeur moyenne. L'amplificateur agit, par l'intermédiaire d'une diode de découplage, sur le régulateur de tension.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Pelissier, R.: «Les Réseaux d'Energie Eléctrique». Vol. 1 «Les aspect techniques du service». Dunod, Paris, 1971.

[2] Sucena e Paiva, J. R.: «Controlo dos sistemas de energia eléctrica». Ed. AEIST, Lisboa, 1974.

[3] Sidler, Thaddäus: «Systéme d'excitation à deux dispositifs de commande, une conception moderne pour le réglage de la tension des alternateurs synchrones». Revue Brown Boveri, 1971 58 (11).

[4] Dudler, Adolf: «Régulation de la tension des alternateurs synchrones avec les régulateurs Unitrol». Rev. Brown Boveri, 1970 57 (1).

[5] Haller, Wolfram: «Limiteurs de courant d'excitation dans les machines synchrones». Revue Brown Boveri, 1970 57 (2).

INFORMATIONS TECHNIQUES

1. Régulateur NEYRPIC RAPID (pour la turbine).
2. Régulateur BBC (pour l'alternateur).

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
International Conference of the Tool and Die Industrye	Viena — Áustria Maio - 77
IV Assemblea General del Centro National de Investigaciones	Madrid — Espanha 31 de Maio a 31 de Junho - 1977
Third International Symposium in Hidrology	Colorado State University — U. S. A. 27 a 29 de Junho - 1977
The Second International Conference on Transfer of Water Resources Information	Colorado State University — U. S. A 30 de Junho a 2 de Julho - 77
Faire International Soudage et Découpage	ESSEN — R. F. A. 21 a 28 de Setembro - 77
L 'INTERPACK' 78 — 8.ª Feira Internacional de Máquinas de Embalar	Düsseldorf — R. F. A. 8 a 14 de Junho - 78
1 ière Foire Specialisée International sur la Téchnique Sidérurgique	Düsseldorf — R. F. A. Junho - 1979

NÚMERO 439 MARÇO DE 1977 ANO LII VOLUME XXXVIII

C. D. U. 624.131.531.6

The influence of self-weight in the stability of cantilever columns [*] [**]

ANTÓNIO RESSANO GARCIA LAMAS
Eng.º Civil, MSc., DIC.
Assistente do IST

SUMÁRIO

Neste artigo o problema do varejamento de colunas em «consola», considerando a acção do peso próprio, é revisto e apresentado de forma actualizada e conveniente para tratamento numérico. Neste trabalho houve a intenção de chamar a atenção de estudantes que iniciam o estudo de problemas de estabilidade de estruturas reticuladas, para a utilidade da equação dos Trabalhos Virtuais numa forma não linear, servindo a coluna como exemplo da sua aplicação a este tipo de estruturas.

As equações gerais são deduzidas e aplicadas à resolução do problema do varejamento de dois tipos de coluna: a de secção uniforme e a de secção circular de parede fina e raio uniformemente variável.

ABSTRACT

The problem of buckling of cantilever columns considering self-weight loading is revised and presented in an up-dated approach suitable for numerical solutions. Emphasis is given to the advantageous use of a non-linear Virtual Work Equation for frame stability problems; the column treated as an example of its application serving as an opportunity to call the attention of students to such usefulness.

Basic equations are derived and applied to the solution of particular types of columns: the constant cross-section and the uniformly tapered thin-walled circular cross-section.

NOTATION

- A — cross-sectional area (A_o, a particular value)
- β' — tapering parameter ($\beta = \beta' L$)
- E — Young's modulus
- I — moment of inertia of a cross section (I_o, a particular value)
- L — column length
- λ — load factor
- M — bending moment
- P — axial force at any level, positive in tension
- P_e — Euler buckling load
- P_1 — concentrated load applied at the free end of the column
- p_1 — non-dimensional parameter characterising P_1 ($p_1 = P_1 L^2/EI_o$)
- p — axially distributed load (p_o, a particular value)
- p^* — non-dimensional parameter characterising the distributed loading ($p^* = p_o L^3/EI_o$)
- ρ — material density
- t — thickness of a thin-walled column
- x,y — coordinates of the plane of buckling with origin at the free end of the column
- z — non-dimensional coordinate ($z = x/L$)
- u,v — displacements in the x and y directions
- ω_i — normalised ith buckling mode shape ($\phi_i = \omega_i'$).

Other notation is defined as it arises in the text.

1. INTRODUCTION

In this article are presented some of the theoretical and numerical results obtained in a study of the influence of self-weight in the stability of cantilever columns under an applied axial load at the end.

The study also included the experimental determination of the buckling load of constant section cantilever column using centrifugal loading which appears to have been the first accurate experimental analysis of this classic problem. The description of these experiments is intended to be published at a later date.

(*) This study was subsidised by Fundação Calouste Gulbenkian through the project «Matemáticas Aplicadas à Engenharia Civil».

(**) Recebido para publicação em 3-6-76.

The influence of self-weight in column design against buckling is rarely considered, mainly because normally, in columns with compressive axial loads applied at the ends, its influence on the buckling load is relatively small. However, in the case of tall masts or chimneys and guyed towers, stability requirements cannot neglect this kind of loading.

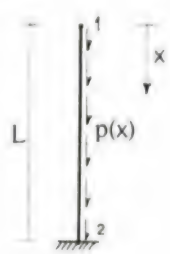
Self-weight is not the only practical load that can be classified as distributed axially. As an example and for approximate analytical treatment, Timoshenko [11] also includes in this kind of loading the variation of compressive stress in the top chord of a bridge truss.

The buckling of columns under their self-weight was first discussed by Euler who, according to Timoshenko, did not succeed in obtaining a satisfactory result. It was later solved by Greenhill (¹) in 1881, as an example of the application of the use of Bessel functions in a variety of buckling problems, and it was independently discussed by Jasinsky (²) in 1884.

Also, according to Timoshenko, this problem was again discussed by Dondorf(³) in 1907 and Griscoff(⁴) in 1930. Timoshenko(⁵) gives Dinnik [4] in 1914 as having solved, using Bessel functions, some varying cross-section cases for which the moment of inertia and the load p can be represented by

$$I\ (x) = I_2\left(\frac{x}{L}\right)^n$$

$$p\ (x) = p_2\left(\frac{x}{L}\right)^q$$



where I_2 and p_2 are the values at the lower fixed end. The principal results for several values of n and q are also given by Timoshenko.

The particular case of uniform cross-section and distributed axial load has been treated more recently, not only solving the differential equations by the use of infinite series for several boundary conditions, but also as an example of application of numerical iterative methods [2], [3], [8].

This paper will revise this case in detail and present it in a systematic form.

The buckling of a uniformly tapered constant thickness thin-walled circular cross-section column will also be studied. The stability of this type of column, which is relevant mainly in the field of concrete structures with applications to tall chimneys and off-shore structures, has already been treated by Gere [5] but only under compressive concentrated loads applied at the ends. The influence of self-weight loading in the buckling of these columns has not so far been found treated in the literature.

One of the main concerns in the writing of this paper was to present the governing equations, even the classic ones, in the most elegant and suitable way for the consideration of numerical solutions. It was found that by using a non-linear Virtual Work Theorem, as suggested by Brown [1] for frame stability problems, this requirement was sufficiently fullfiled. For that reason it was decided to include the derivation of this V.W. equation applied to the cantilever column, trying to use the same notation as in [1] for easier reference.

Basic equations are then derived which will be necessary for the later study of some particular cases; also expressions are found that were used in designing the equipment for the experiments [9] to be described in another article.

This paper only deals with two-dimensional or plane buckling problems and throughout a linear elastic behaviour of the material is assumed. In the displacements involved, considered to be very small, the deformation due to shear is neglected and the centre-line of the column is considered to be inextensible.

2. NONLINEAR VIRTUAL WORK EQUATION

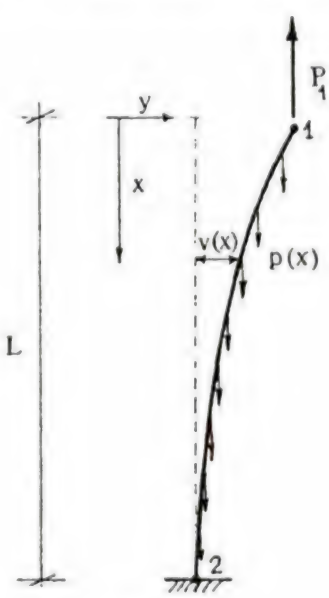


Figure 1

(¹) Greenhill, A. G. — Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 4, 1881.

(²) Jasinsky, F. S. — «Scientific Papers of F. S. Jasinsky». Vol. 1, St. Petersburg, 1902.

(³) Dondorf, J. — «Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit veränderlichem Querschnitt und Veränderlichem Druck, ohne und mit Querstützen», Dissertation, Dusseldorf, 1907.

(⁴) Grishcoff, N. — Bulletin acad. sci., Kiev, 1930.

(⁵) The translated works of Dinnik referred to by Timoshenko, [2], do not consider distributed axial loads. Possibly this kind of load was only treated in the original 1914 paper.

Consider an element A B of the column represented in figure 1, in a displaced configuration A'B' from an initially straight position ($\bar{u} \equiv 0$, $\bar{v} \equiv 0$) along which a Lagrangean coordinate x is measured (fig. 2). The components of the internal forces (P,axial force positive in tension; M, bending moment; F, shear) are also taken in the directions of the undeformed centre-line. The self-weight p dx is fixed in value and direction.

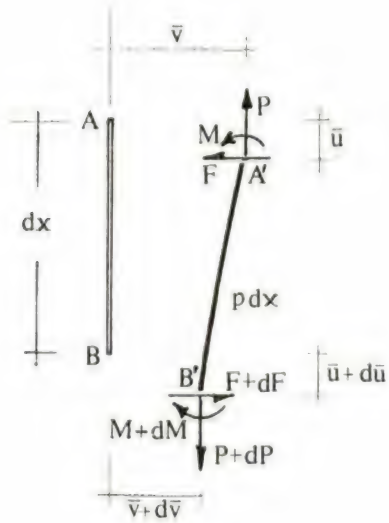


Figure 2

For equilibrium $\mathbb{P}' = -p$

$$F' = 0$$

$$M' = \mathbb{P}\bar{v}' + F(1+\bar{u}')$$

neglecting second order terms and denoting by a prime the differentiation with respect to x.

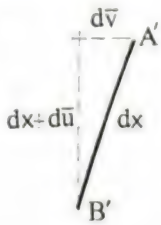
Assuming inextensibility as it is normal procedure in many stability problems in frames

$$(dx+d\bar{u})^2 + d\bar{v}^2 = dx^2$$

Dividing by dx, $(1+\bar{u}')^2+\bar{v}'^2=1$

which solved in order to $1+\bar{u}'$ gives,

$$1+\bar{u}' = \sqrt{1+\bar{v}'^2}$$



For small deflexions $\bar{v}' \ll 1$ and the second member can be approximated by $1 - \frac{1}{2}\bar{v}'^2$ hence the usual expression for inextensibility

$$\bar{u}' + \frac{\bar{v}'^2}{2} = 0 \qquad (1)$$

Accepting this expression it is possible to neglect $\bar{u}'$ in comparison with unity. In this particular case as $F' = 0$, F is constant and zero at the top so that the equilibrium equations reduce to

$$P' = -p$$
$$M' = \mathbb{P}\bar{v}' \qquad (2)$$

these being the only required relations between the internal forces and associated displacements ($\bar{u}$, $\bar{v}$). The system ($\mathbb{P}$, M, p, $\mathbb{P}_1$, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{u}'$, $\bar{v}'$,...) will be designated according to [1] by the «equilibrium system».

For any compatible and continuous displacements u and v, if v' is continuous between ends 1 and 2, as $\mathbb{P}$ and M are also continuous it is possible to write

$$\int_1^2 \left(Pu' + Mv'' \right) dx = \left[Pu + Mv' \right]_1^2 + \int_1^2 (pu - P\bar{v}'v')\, dx \qquad (3)$$

integrating by parts and using the equilibrium relations.

Designating by Δ_1 the vertical displacement of end 1 associated with the displacement system (u, v) it follows that

$$\left[Pu' + Mv' \right]_1^2 = P_1 \Delta_1$$

as there is no external applied moment at end 1 and $u=v'=0$ at end 2.

Substituting, rearranging and approximating the bending moment M by $EI\bar{v}''$ equation (3) can be written as

$$\int_0^L pu\, dx + P_1\Delta_1 = \int_0^L EI\bar{v}''v''\, dx + \int_0^L P(u' + \bar{v}'v')\, dx \qquad (4)$$

which has the form of a Virtual Work equation. This form would be maintained if a moment M_1 was applied at end 1 because assuming $v' \ll 1$ the rotation can substitute the value of v' at that end.

Equation (4) can be seen as a non-linear form of the usual V.W. Theorem applied to the cantilever column: the first member represents the work of external loads on the displacement system (u, v); the second member is non-linear in the equilibrium system.

It will be useful to introduce at this stage the forms that this equation takes for infinitesimal increments ($\dot{u}$, $\dot{v}$) of the displacement system (u, v)

$$\int_0^L p\dot{u}\,dx + P_1\dot{\Delta}_1 = \int_0^L EI\bar{v}''\dot{v}''\,dx +$$

$$+ \int_0^L P(\dot{u}' + \bar{v}'\dot{v}')\,dx \qquad (5)$$

and for increments of both equilibrium and displacement systems

$$\int_0^L \dot{p}\,\dot{u}\,dx + \dot{P}_1\dot{\Delta}_1 = \int_0^L EI\dot{\bar{v}}''\dot{v}''\,dx +$$

$$+ \int_0^L \dot{P}(\dot{u}' + \bar{v}'\dot{v}')\,dx + \int_0^L P\dot{\bar{v}}'\dot{v}'\,dx \qquad (6)$$

3. GOVERNING GENERAL EQUATIONS

Brown [1] showed that for frame problems it is very convenient to use Drucker's definition of stability which states: «if the loaded structure is in a stable condition, any external agency acting upon it would perforce do positive work on the change of displacements it produced».

In order to apply this criterium consider the column in equilibrium under loads p and P_1 in a displaced configuration (u,v). The main assumptions refered to in the introduction and the use of a nonlinear virtual work equation in incremental form like (6) provide an expression for the work D of load increments $(\dot{p}, \dot{P}_1)$, with corresponding variations of internal forces $(\dot{P}, \dot{M} = EI\dot{v}'')$, in any disturbance $(\dot{u}, \dot{v})$ from the equilibrium configuration (u,v). Omitting the bars over the displacements of the equilibrium system, as they coincide with those of the displacement system, it follows that

$$D = \int_0^L EI\dot{v}''^2\,dx + \int_0^L \dot{P}(\dot{u}' + v'\dot{v}')\,dx +$$

$$+ \int_0^L P\dot{v}'^2\,dx \qquad (7)$$

where EI is the stiffness at level x.

This expression can be simplified because from equation (1) inextensible small increments from a displaced configuration (u,v) require

$$\dot{u}' + v'\dot{v}' = 0$$

which substituted in (7) gives

$$D = \int_0^L EI\dot{v}''^2\,dx + \int_0^L P\dot{v}'^2\,dx \qquad (8)$$

If v happens te be zero everywhere, as in the perfectly straight axial loading case ($u \equiv 0, v \equiv 0$), inextensibility is expressed by $\dot{u}' \equiv 0$, and the integrals represent twice the strain and potential energies involved in the deformation.

For stability, the quantity D referred to as the 'stability discriminant' must be greater than zero:

$$D > 0 \quad \text{for stability} \qquad (9)$$

When there exists a disturbance $\dot{v}$ for which $D = 0$ and none for which $D < 0$, a neutral stability condition arises. Such displacement shapes in the present problem are the critical modes. Equation (8) can also be obtained from minimum total potential energy [1]. The buckling condition can then be expressed as

$$\min_{\dot{v}} D = 0 \qquad (10)$$

Assuming a proportional loading, consisting of distributed loads $\lambda\,\bar{p}$ (x) and terminal force $\lambda\,\bar{P}_1$, where $\bar{p}$ and $\bar{P}_1$ are constant with respect to λ, the axial internal force P can be expressed by

$$P = \lambda\,\bar{P}$$

$$\text{where} \quad \bar{P} = \bar{P}_1 - \int_0^x \bar{p}(\xi)\,d\xi \qquad (11)$$

and ξ, x are measured downward from the top of the column.

For convenience a function $\dot{\phi} \equiv \dot{v}'$ can be introduced in the expression for D, and if a normalising condition is imposed on $\dot{v}$, a non incremental and therefore finite function ϕ can replace $\dot{\phi}$.

The normalising condition is equivalent to substituting $\dot{v}$ by ω ($\phi = \omega'$), obtained by dividing $\dot{v}$ by an infinitesimal quantity, and it is useful to consider it in such a way that

$$\int_0^L \gamma\,\phi^2\,dx = 1 \qquad (12)$$

whehe γ is an appropriate continuous function chosen according to convenience and usually positive over the whole interval $0 \leq x \leq L$ (a suitable choice for γ can be: $\gamma = -\bar{P}$).

Substituting, condition (10) sets up an eigenvalue problem

$$D^* = \int_0^L EI\phi'^2\,dx + \lambda\int_0^L \bar{P}\,\phi^2\,dx = 0 \qquad (13)$$

with an infinite number of positive eigenvalues denoted in ascending order by

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

to which the slopes ϕ of the critical modes ω_i are related, [1], [6], by

$$\lambda_i = \int_0^L E I \phi_i'^2 \, dx \tag{13}$$

if $-\overline{P}$ is used as the weighting function in the normalising condition.

The minimisation problem referred to in equation (10) defines an Euler condition expressed by

$$(E I \phi_i')' - \lambda_i \overline{P} \phi_i = 0 \tag{14}$$

which together with the boundary conditions

$$\phi_i'(0) = \phi_i(L) = 0 \tag{15}$$

provides a way of determining the eigenvalues λ_i and eigenfunctions ϕ_i.

Two practical formulations of this problem for a given column are of interest in this study:

- find the maximum load P_1 that it is possible to apply taking the constant distributed load p (self-weight) into consideration.
- verify the stability for a given loading system.

The first problem is reduced to the determination of the load P_1 for which the smallest eigenvalue λ_1 is equal to unity; the second amounts to verifying that the first eigenvalue is greater than or equal to unity.

4. THE IMPERFECT COLUMN

It can be proved, [1], [6], that the eigenfunctions ϕ_i (or the corresponding buckling modes) generated by an axial loading system $\overline{P}$, normalised using $\beta = -\overline{P}$, are orthogonal in the sense that

$$-\int_0^L P \phi_i \phi_j \, dx = \delta_{ij} \tag{16}$$

(where δ_{ij} is the symbol of Kronecker).

The eigenfunctions ϕ_i (or ω_i) provide a basis [6] for approximate expansion of transverse displacements v as a series:

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \omega_i \tag{17}$$

where the a_i can be calculated, using orthogonality, by the expression

$$a_i = -\int_0^L \overline{P} v' \phi_i \, dx \tag{18}$$

The approximation involved was shown in [1] being the assumption that everywhere $u' \simeq 0$, which corresponds to neglect shortening due to bowing. This is possible for very small displacements.

This property of the set of eigenfunctions (ϕ_i or ω_i) applies to the possibility of expanding in the same way any piecewise, twice differentiable function, satisfying the boundary conditions. In particular, very small initial imperfect shapes v_o can be expressed in series form:

$$v_o = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \omega_i \tag{19}$$

with $b_i = -\int_0^L \overline{P} v_o' \phi_i \, dx$

The satisfaction of the boundary condition $v_o'(L) = 0$ can be expected to be violated by the general small continuous imperfection, but such singularities will not be considered.

A column, loaded by a system $\lambda \overline{P}$, with an imperfect shape v_o satisfying the boundary conditions and "very small" so that it can be assumed that $u_o' \simeq 0$ everywhere, can be treated expanding v_o as (19), using the eigenvalues and normalised eigenfunctions (λ_i, ω_i) generated by $\lambda \overline{P}$ for the corresponding perfect column. The displaced shape v of such column under these loads can also be expanded as (17).

Using, however, a Virtual Work equation in incremental form like equation (5) it is possible, as will be shown, to deduce a more useful expression for the expansion of v for the treatment of the buckling problem of imperfect columns.

For this purpose consider in the construction of equation (5), the equilibrium system as the loading system i.e. ($\lambda\overline{p}$, $\lambda\overline{P}_1$, $\lambda\overline{P}$, $M = EI(v'' - v_o'')$, u, v,...) and for displacement system the buckling mode shape ($\dot{u}_j$, $\dot{v}_j$) where $\dot{u}_j' = 0$ for inextensibility:

$$\lambda \int_0^L \overline{p} \dot{u}_j \, dx + \lambda \overline{P}_1 \dot{a}_{1j} = \int_0^L E I (v'' - v_o'') \dot{v}_j'' dx + \lambda \int_0^L \overline{P} v' v_j' \, dx$$

Since $\dot{u}_j$ is constant and zero at the base of the column, $\dot{u}_j = \dot{\Delta}_{1j} = 0$. Dividing by the normalising quantity of $\dot{v}_j$ it is possible to write

$$0 = \int_0^L E\,I\,(v'' - v_o'')\,\omega_j''\,dx + \lambda \int_0^L \overline{P}\,v'\,\omega_j'\,dx \qquad (20)$$

Substituting in equation (20) the expansions of v and v_o in terms of ω_i and using orthogonality the equation reduces to

$$\lambda_j\,(a_j - b_j) - \lambda\,a_j = 0$$

Hence the components a_j of the displacement shape are

$$a_j = \frac{\lambda_j\,b_j}{\lambda_j - \lambda}$$

so that $$v = \frac{\lambda_1\,b_1}{\lambda_1 - \lambda}\,\omega_1 + \frac{\lambda_2\,b_2}{\lambda_2 - \lambda}\,\omega_2 + \dots \qquad (21)$$

When λ approaches λ_1 the first term becomes indefinitely large. Denoting by $\delta = v(\sigma)$ the lateral displacement at the top with an initial value δ_o, its variation with the load would take the general form shown in figure 3

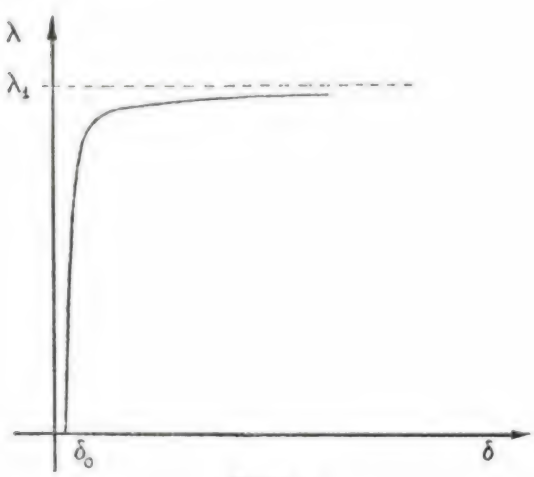


Figure 3

The reference to the imperfect column and these results were introduced at this stage, not only as useful for the understanding of the buckling problem in its practical aspects but also because they were necessary in designing the details of the equipment for the experiments already mentioned in the introduction.

5. CONSTANT CROSS-SECTION COLUMNS UNDER UNIFORM DISTRIBUTED LOADING

In this particular case $I = I_o$ and $\overline{p} = p_o$ where both I_o and p_o are constants and equation (14) reduces to

$$E\,I_o\,\phi''_1 - \lambda_1\,\overline{P}\,\phi_1 = 0$$

where $$\overline{P} = P_1 - \int_0^x p_0\,d\xi = P_1 - p_0\,x$$

(omitting the bar over P_1).

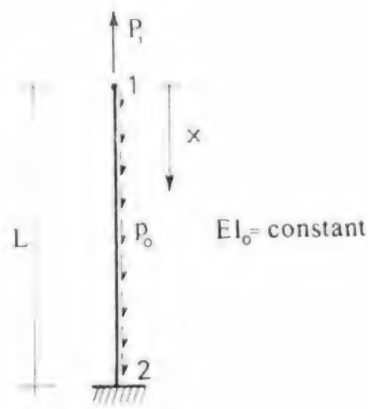


Figure 4

The first stability problem formulated in the end of section 3. Implies now the determination of the systems (P_1, p_o) for which $\lambda_1 = 1$. This problem involves the solution of the differential equation

$$E\,I_o\,\phi''_1 - (P_1 - p_o\,x)\,\phi_1 = 0 \qquad (22)$$

It is useful to introduce non-dimensional quantities

$$0 \le z = - \le 1 \qquad p_1 = \frac{P_1\,L^2}{EI_o} \qquad (23)$$

$$\frac{d}{dz} = L\frac{d}{dx}$$

which, substituted in (22), give

$$\frac{EI_o}{L^2}\,\phi''_1 - \frac{EI_o}{L^2}\,(p_1 - \frac{p_o\,L^3}{EI_o}\,z)\,\phi_1 = 0$$

denoting also $\frac{d}{dz}\,\phi_1 = \phi'_1$.

Simplifying,

$$\phi''_1 - (p_1 - p^*\,z)\,\phi_1 = 0 \qquad (24)$$

where $p^* = \frac{p_o\,L^3}{EI_o}$ is a non-dimensional parameter characterising the distributed loading.

The solution of equation (24) is possible using the method of Frobenius [7] assuming it can be representeed by an infinite power series of the form:

$$\phi_1 = z^r (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r} \qquad (25)$$

with the a's constants and $a_0 \neq 0$. Differentiating and substituting in (24) gives

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(r+n)(r+n-1) a_n - (p_1 a_{n-2} - p^* a_{n-3}) \right] z^{r+n-2} = 0$$

where $a_{-3} = a_{-2} = a_{-1} = 0$.

If the series is to vanish for $0 \leq z \leq 1$ the coefficients of all terms must vanish. Equating coefficients to zero, the coefficient of the lowest power term provides the indicial equation

$$r(r-1) = 0$$

with roots $r = 0,1$, and the higher power terms provide recurrence relations for determining the coefficients a_n:

$$a_1 (r+1) r = 0$$
$$(r+1)(r+2) a_2 - p_1 a_0 = 0$$

and for $n \geq 3$

$$a_n = \frac{p_1}{(r+n)(r+n-1)} a_{n-2} - \frac{p^*}{(r+n)(r+n-1)} a_{n-3}$$

Using the first root of the indicial equation $r = 0$, a_1 is left indeterminate, $a_2 = \frac{p_1 a_0}{2}$ and

$$a_n = \frac{p_1}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{p^*}{n(n-1)} a_{n-3} \quad \text{for } n \geq 3.$$

Substituting these expressions into the series (25) the solution takes the form:

$$\phi_1 = a_0 S_0 + a_1 z S_1 \qquad (26)$$

in which

$$S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n; \; S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

where

$$b_0 = 1; \; b_1 = 0; \; b_2 = \frac{p_1}{2}; \; b_n = \frac{p_1}{n(n-1)} b_{n-2} - \frac{p^*}{n(n-1)} b_{n-3} \text{ for } n \geq 3$$

and

$$c_0 = 1; \; c_1 = 0; \; c_2 = \frac{p_1}{6}; \; c_n = \frac{p_1}{(n+1)n} c_{n-2} - \frac{p^*}{(n+1)n} c_{n-3} \quad \text{for } n \geq 3.$$

Proceeding in a similar way for the root $r = 1$, $a_1 = 0$, and the solution becomes

$$\phi_1 = a_0 z S_1$$

This solution is already contained in the solution (26) and therefore (26) can be used as the solution of the differential equation (24) and then

$$\phi'_1 = a_0 S'_0 + a_1 (z S'_1 + S_1)$$

Introducing the boundary conditions,

$$\phi_1 (1) = 0: \; a_0 S_0 (1) + a_1 S_1 (1) = 0$$

and $\phi'_1 (0) = 0$: $a_0 S'_0 (0) + a_1 S_1 (0) = 0$

i.e., $a_0 \sum b_n + a_1 \sum c_n = 0$ and $a_0 0 + a_1 1 = 0$

i.e., $a_1 = 0$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 0$

This equation relates p_1 to p^* and can be solved using a linear interpolation method.

From results presented by Dalal [2], a plot of p_1 against p^* is possible, but it is perhaps more useful to present it scaling those parameters by a factor $\frac{\pi^2}{4}$ such that $\frac{P_1}{P_e} = \frac{p_1}{\frac{\pi^2}{4}}$; $\frac{P_0 L}{P_e} = \frac{p^*}{\frac{\pi^2}{4}}$ (see figure 5).

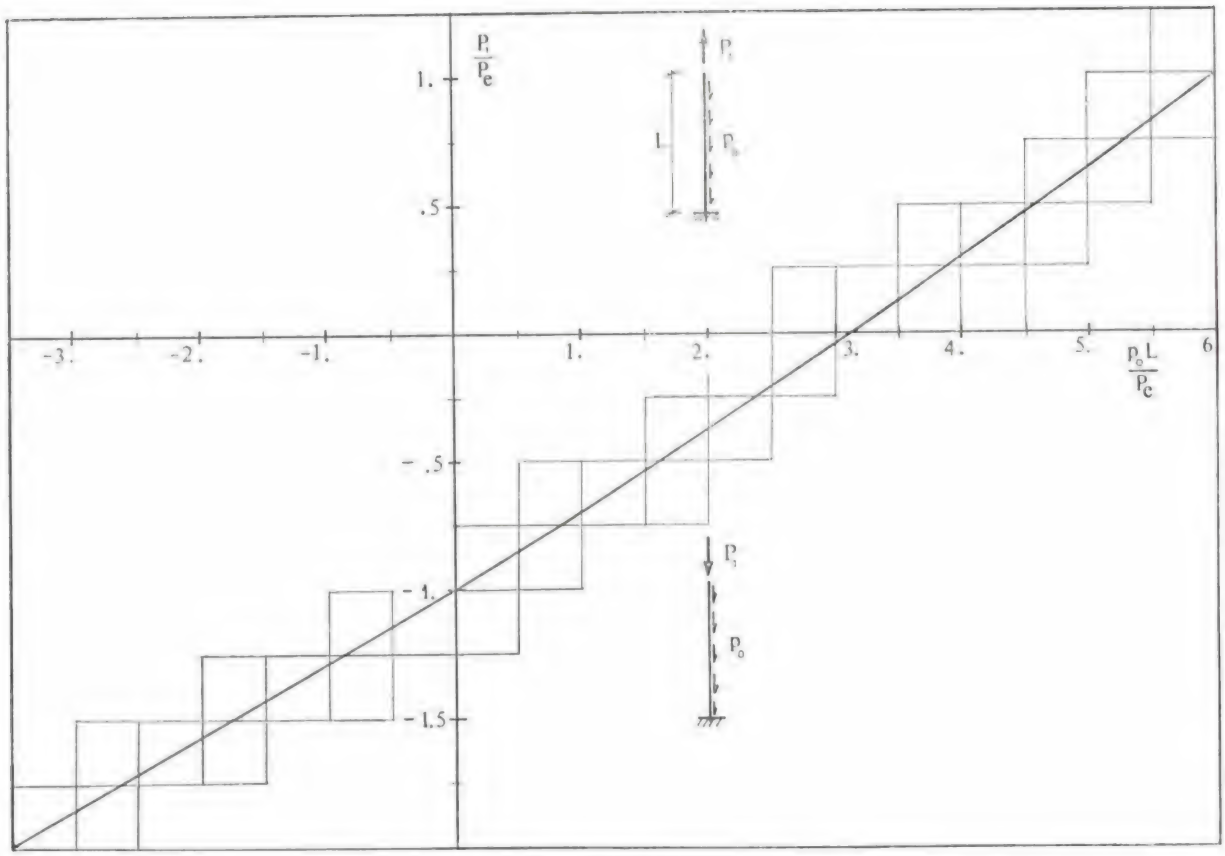


Figure 5

Constant cross-section cantilever column: Relation at buckling between end load and uniform axial load

For the particular case $p_1 = 0$, $p^* \simeq 7.837$, in agreement with previous results [10], [12]. An empirical relation between $\frac{P_1}{P_e}$ and $\frac{p_o L}{P_e}$ was attempted by Dalal:

$$\frac{P_1}{P_e} = 1.0000 - 0.2973 \left[\frac{P_0 L}{P_e}\right] - 0.0052 \left[\frac{P_0 L}{P_e}\right]^2 - 0.0001 \left[\frac{P_0 L}{P_e}\right] \quad (27)$$

with percentage errors smaller than 0.5 % in the range of p^* used in the plot.

The expression for the slope of the buckling mode shape in the case $p_1 = 0$ ($p^* \simeq 7.837$), can be obtained from

$$\phi_1 = a_o \left(1 - \frac{p^*}{3!} z^3 + \frac{4}{6!} p^{*2} z^6 - \frac{7.4}{9!} p^{*3} z^9 + \ldots\right) \quad (28)$$

hence

$$\phi'_1 = a_o \left(-\frac{p^*}{2!} z^2 + \frac{4}{5!} p^{*2} z^5 - \frac{7.4}{8!} p^{*3} z^8 + \ldots\right) \quad (29)$$

and

$$\omega_1 = a_o \left(c + z - \frac{p^*}{4!} z^4 + \frac{4}{7!} p^{*2} z^7 - \frac{7.4}{10!} p^{*3} z^{10} + \ldots\right) \quad (30)$$

where $c = -0.7186$ using $\omega_1 (1) = 0$.

These expressions can be used to estimate the maximum post-buckling bending strains (proportional to ϕ') in the testing bars of the experiments mentioned in section 1. It is also convenient to point out the relations between these quantities expressed in the real coordinate x and the "reduced" coordinate z:

$$\phi_1 (z) = \phi_1 (zL); \frac{d\phi_1}{dz} = L \frac{d\phi_1}{dx}; \omega_1 (z) = \frac{\omega_1 (zL)}{L} \quad (31)$$

6. BUCKLING OF UNIFORMLY TAPERED CONSTANT THICKNESS THIN-WALLED CIRCULAR CROSS-SECTION COLUMNS UNDER SELF-WEIGHT LOADING

The buckling problem of a uniformly tapered column can be regarded as an optimising problem, the simpler case with just one parameter, if formulated as the determination of the taper for minimum volume subject to a buckling condition. For this reason this section was primarily intended to be

included in a study of the problem of optimisation for minimum volume of the shapes of thin-walled columns under self-weight loading but it was thought to be of interest to relate the obtained results to the ones for the column with constant cross-section.

The problem reduces to the solution of the differential equation (14), for $\lambda_1 = 1$ in the interval $0 \leq x \leq L$, depending upon the tapering parameter β'. Although it would be more complicated than in the case of constant cross-section, the method of Frobenius using infinite series could also be applied in this instance. However, a double-iterative numerical process was devised, writing the differential equation in a finite-difference form and using a Rayleigh method to express the parameter β', in order to find simultaneously the slope ϕ and the value of β'. The main intention of using this method was to attempt and experiment with a method that could be used in the solution of the system of simultaneous differential equations resulting from the optimisation of a general shape. This method provided accurate results presented in figure 7 in suitable form for design purposes.

For a thin-walled circular cross-section of thickness t and mean radius R, varying along the length, we can write

$$I \simeq \pi \, t \, R^3 \tag{32}$$

and

$$A = 2 \, \pi \, t \, R$$

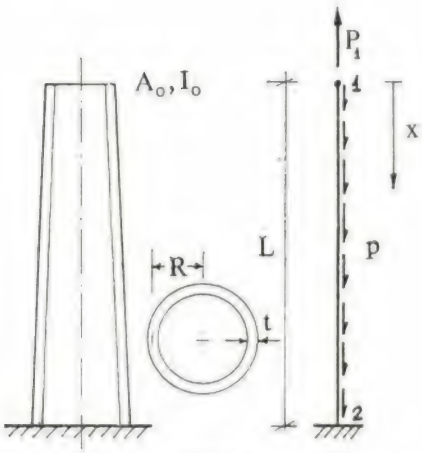


Figure 6

The values given by expression (32) are smaller than the correct ones but the proportional error involved is $\frac{\Delta I}{I} < \frac{1}{4} \left(\frac{t}{R}\right)^2$.

For an error smaller than 0.25 %, for example, it is sufficient that $R \geq 10$ t and the introduction of such a constraint makes possible the inclusion of this type of column in the class for which

$$I \simeq k \, A^3$$

It will be assumed that the thickness t is constant.

The variation of the radius with x, can be described in a uniformly tapered column by $R = R_o \, (1 + \beta' \, x)$, where β' will be called the tapering parameter, and R_o is the mean radius at end 1 (see figure 6).

Hence, $A = A_o \, (1 + \beta' \, x)$
$I = I_o \, (1 + \beta' \, x)^3$

The minimum volume column corresponds to the value of β' for which

$$\min_{\phi} D^* = 0 \text{ when } \lambda = 1 \qquad (D^* \text{ is defined in (13)}).$$

P, the axial internal force, is due to P_1 and the self-weight p, $(p = A\rho)$:

$$P = P_1 - \int_0^x A \, \rho \, d\xi = P_1 - A_o \, \rho \, x \left(1 + \frac{\beta'}{2} x\right)$$

with ρ being the material density.

$D^* = 0$, together with

$$(E I \, \phi')' - P \, \phi = 0 \qquad \phi'(0) = \phi(L) = 0$$

provides the necessary equations for the numerical solution.

Substituting and introducing the same non-dimensional quantities defined in (23) these equations can be written

$$\int_0^1 \left\{ (1 + \beta z)^3 \phi'^2 + \left[p_1 - p^* z \left(1 + \frac{\beta z}{2}\right) \right] \phi^2 \right\} dz = 0 \tag{33}$$

$$\left[(1 + \beta z)^3 \phi' \right]' - \left[p_1 - p^* z \left(1 + \frac{\beta z}{2}\right) \right] \phi = 0 \tag{34}$$

where $\beta = \beta' L$ and again $p^* = \frac{A_o \, \rho \, L^3}{E \, I_o}$.

Equation (33) can be rearranged to take the form

$$A \, \beta^3 + \beta^2 + C \, \beta + D = 0 \tag{35}$$

where $A = \int_0^1 z^3 \phi'^2 \, dz$

$$B = \int_0^1 z^2 \phi'^2 \, dz$$

$$C = 3 \int_0^1 \left(z \phi'^2 - \frac{p^*}{2} z^2 \phi^2 \right) dz$$

$$D = \int_0^1 \left[\phi'^2 + (p_1 - p^* z) \phi^2 \right] dz$$

For each pair of values of p^* and p_1, if the shape of

ϕ was known, the value of the reduced tapering parameter β could be determined solving this equation. The numerical method used to solve the problem was based on the introduction of an estimate of the shape of ϕ in (35) to obtain an approximate value for β. This value was then used with the help of equation (34) to «improve» the shape ϕ. For this purpose (34) was writen in a central finite-difference form at N-2 interior points of a mesh of uniform size over the interval $0 \leq z \leq 1$. Together with the

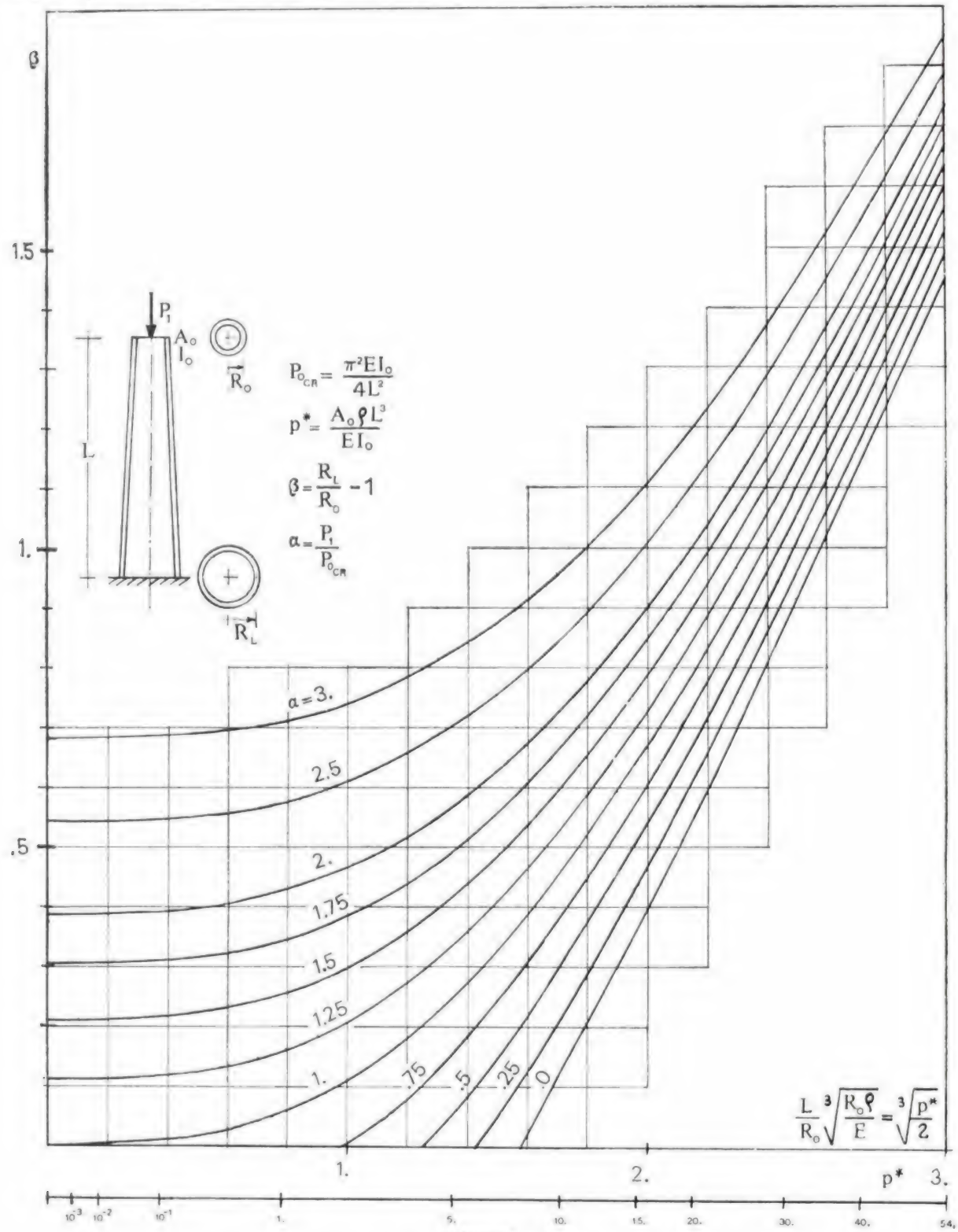


Figure 7

Thin-walled cantilever column: Relations between tapering parameter and critical loads

boundary conditions ($\phi_1 = \phi_2$; $\phi_N = 0$) this provides N equations on the N values of ϕ, allowing the «improvement» of the shape ϕ using a Gauss-Seidel relaxation method and a normalising condition for ϕ making at each step $\phi_1 = 1$.

This iterative scheme was programmed using a trapezoidal rule to calculate the coefficients of equation (35) and Newton's method for its solution. Uniform meshes of 26,31 and 51 points were used and the several iterations repeated until the relative difference in the value of β at consecutive iterations was smaller than 0.1 %.

The results for p^*, $\beta \geq 0$ and several values of $-\dfrac{p_1}{\frac{\pi^3}{4}}$ between 0. and 3.0 (compressive load) are presented in figure 7 in a convenient coordinate system.

The values for β obtained with the numerical method described should be expected to be slightly higher than the exact ones and convergence was more difficult when β was very small. A study of convergence with various mesh sizes for different values of p^* and p_1 showed, however, that the values used for the graph can be considered with proportional errors smaller than 0.5 %.

It was also verified that they closely agree with those obtained by Gere [5] for $p^* = 0$.

Examples of application of the curves of figures 5 and 7 :

1 — A cantilever column with circular thin-walled constant cross-section has the following characteristics : $L = 60$ m; $R_o = 1.5$ m; $t = 0.15$ m; $E = 2 \times 10^{10}$ Nm^{-2}. From figure 5 or expression of $-\dfrac{p_1}{\pi^2/4}$ between 0. and 3.0 (compressive load) for such a column, the load carrying capacity is reduced by the self-weight load only in approximately 3 %.

2 — A similar tapered column from the same material and same height and with minimum cross-section with identic characteristics, is required to carry a weight on top equal to twice the buckling load $P_e = P_o = \dfrac{\pi^2 EI}{4 L^2}$. From figure 7, for $\sqrt[3]{p^*/_2} \simeq 0.5$ and $\alpha = 2.0$, $\beta \geqslant 0.4$ hence, any radius at the base greater than 2.1 m would be sufficient.

REFERENCES

1 — *Brown E. H.*, «The failure of frames» — Proc. Royal Soc., London, A. 319, 1970.

2 — *Dalal T. S.*, «Columns with distributed axial loads». The Structural Engineer — Vol. 48, Nov. 1970, N.° 11.

3 — *Desayi P.*, «Determination of buckling loads for columns with varying cross section». The Structural Engineer — Vol. 45, N.° 6, June 1967.

4 — *Dinnik A.*, «Design of columns of varying cross section» (translated from Isvest. Gornovo Inst., Ekaterinoslav, 1914, by M. Maletz) — Trans. A. S. M. E. — Vol. 51, 1925, APM-51-11, and Vol. 54, 1932, APM-54-16.

5 — *Gere J. M. & Carter W. O.*, «Critical buckling loads for tapered columns» — Proc. A. S. C. E. — Vol. 88, N.° ST 1, Feb., 1962.

6 — *Horne M. R.*, «The effect of finite deformations in the elastic stability of plane frames» — Proc. Royal Soc., London, A. 266, 1961.

7 — *Ince E. L.*, «Ordinary differential equations». Dover Publ. Inc. 1956.

8 — *Iyengar T. K. S. R. & Anantharamu S.*, «Buckling of bars of variable rigidity with varying axial load». Journal of the Royal Aero. Soc. — Vol. 67, 1963.

9 — *Lamas A. R. G.*, «Buckling of cantilever columns under self-weight». MSc Thesis, University of London, 1974.

10 — *McLachlan N. W.*, «Bessel Functions for Engineers». Oxford University Press — 1955.

11 — *Timoshenko & Gere*, «Theory of elastic stability» — McGraw-Hill.

Feiras e Exposições

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
Exposição de Bens de Consumo, Comércio e Indústria	Lubeck — R. F. A. Junho
Feira Internacional	Barcelona — Espanha 1 a 10 de Junho
Feira Internacional	Nancy — França 2 a 13 de Junho
Salão Internacional da Construção de Janelas	Frankfurt — R. F. A. 3 a 5 de Junho
Salão Internacional da Aeronáutica e do Espaço	Paris — França 3 a 12 de Junho
INTERMAT — 3.º Salão Internacional da Engenharia Civil e da Construção	Bruxelas — Bélgica 4 a 12 de Junho
INTERKLIMA — Exposição Internacional do Ar Condicionado	Zagreb — Jugoslávia 6 a 10 de Junho
INTERCLIMA — Salão Internacional de Temperatura e Climatização	Paris — França 6 a 11 de Junho
Feira Internacional de Estores e Indústrias Similares	Stuttgart — R. F. A. 9 a 12 de Junho
ELEKTRO — 77 — 2.ª Exposição Internacional do Equipamento Eléctrico	Moscovo — U. R. S. S. 9 a 23 de Junho
Salão Internacional dos Transportes e das Comunicações	Teerão — Irão 10 a 17 de Junho

C. D. U. 621.374.33

Número e comprimento de ciclos no espaço de estados de um registo geral de deslocamento [*]

JOSÉ ALBERTO BAPTISTA TOMÉ
Instituto Superior Técnico
Centro de Análise e Processamento de Sinais

RESUMO

É estabelecida a equivalência entre um registo geral de deslocamento e um registo de deslocamento, directo ou invertido. Para estes são deduzidos os possíveis ciclos e fórmulas iterativas que permitem calcular o número de ciclos com determinado comprimento.

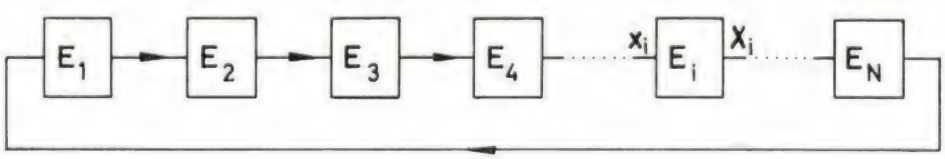
ABSTRACT

Equivalences between generalized shift-register and direct feedback or twisted shift-registers are established. For a given shift-register length, the possible cycle lengths and number of cycles are established by means of an iterative formula.

INTRODUÇÃO

Considera-se um registo geral de deslocamento uma estrutura como a da Fig. 1 em que cada andar representa um atraso de uma unidade temporal ou uma negação além do mesmo atraso.

Tal estrutura corresponde a um conjunto de funções Booleanas de uma entrada e com atraso unitário ligadas entre si de tal modo que a entrada de cada andar esteja ligada à saída de outro e cada saída ligue a uma só entrada de outro andar.



$X_i(t+1)=x_i(t)$ ou $X_i(t+1)=\overline{x}_i(t)$ para q.q. i.

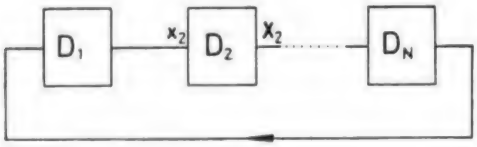
Fig. 1

É possível demonstrar que um registo geral de deslocamento é equivalente a um registo directo de deslocamento ou a um registo invertido de deslocamento com o mesmo número de andares. Duas estruturas dizem-se equivalentes se os seus espaços de estados são os mesmos depois de uma nova designação dos estados.

O registo directo de deslocamento (Fig. 2-a) tem uma composição semelhante ao geral mas cada andar é apenas um atraso temporal. Quanto ao registo invertido de deslocamento (Fig. 2-b) é também constituído por atrasos em cada andar mas a saída do último andar é complementada (sem qualquer

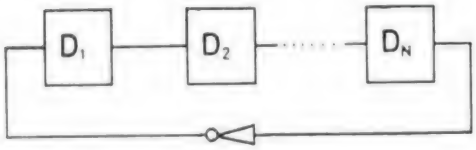
(*) Recebido para publicação em 23-11-76.

atraso temporal) antes de ser utilizada como entrada para o primeiro andar.



(a)

$$X_1(t+1) = x_1(t)$$



(b)

$$X_1(t+1) = x_1(t)$$

Fig. 2

REGISTOS DE DESLOCAMENTO, DIRECTO E INVERTIDO, COMO ESTRUTURAS INDEPENDENTES

Prova-se agora que qualquer registo geral de deslocamento é equivalente a um registo directo de deslocamento se o número de negações for par e a um invertido se esse número for ímpar.

Considerem-se duas estruturas distintas e respectivos espaços de estado, em que A e B são dois estados quaisquer sucessivos (A é o antecedente de B) do primeiro espaço de estados.

Utilize-se uma correspondência qualquer entre estados de um e outro espaço, em que ao estado A se faz corresponder A' no segundo espaço de estados e a B se faz corresponder B'.

Como cada um dos espaços de estado pode ser descrito pela enumeração dos seus estados e por um operador λ que para cada estado acha o seu sucessor as estruturas são equivalentes se o sucessor de A' for B', ou seja:

$$A \rightarrow A' \Rightarrow A\lambda \rightarrow A'\lambda$$

Asserção 1

Um registo geral de deslocamento com duas negações é equivalente a um registo directo de deslocamento com o mesmo número de andares.

Prova:

Considere-se que no registo geral de deslocamento as negações existem nos andares i e j, e veja-se a representação de dois estados sucessivos A e B do espaço de estados do registo directo de deslocamento em que se encontram sublinhados os conteúdos dos andares i e j:

Estado A $\ldots a_{i-1}\ \underline{a_i}\ a_{i+1}\ a_{i+2} \ldots a_{j-2}\ a_{j-1}\ \underline{a_j}\ a_{j+1} \ldots$

Estado B $\ldots a_{i-2}\ \underline{a_{i-1}}\ a_i\ a_{i+1} \ldots a_{j-3}\ a_{j-2}\ \underline{a_{j-1}}\ a_j \ldots$

Como regra de equivalência entre estados do espaço do registo directo de deslocamento e do geral utiliza-se a seguinte:

Ao estado A genérico corresponde um estado A' em que todos os conteúdos de andares entre i e j são complementados incluindo o do andar i e excluindo o de j.

Obtêm-se os estados A' e B' correspondentes a A e B seguindo esta regra:

Estado A' $\ldots a_{i-1}\ \underline{\overline{a_i}}\ \overline{a_{i+1}}\ \overline{a_{i+2}} \ldots \overline{a_{j-2}}\ \overline{a_{j-1}}\ \underline{a_j}\ a_{j+1} \ldots$

Estado B' $\ldots a_{i-2}\ \underline{\overline{a_{i-1}}}\ \overline{a_i}\ \overline{a_{i+1}} \ldots \overline{a_{j-3}}\ \overline{a_{j-2}}\ \underline{a_{j-1}}\ a_j \ldots$

Ora o estado B' é exactamente o sucessor de A' uma vez que para o registo geral de deslocamento se têm as relações seguintes (se $\underline{t}$ for o instante em que é tomado o estado A').

$$X_{i-1}\ (t+1) = X_{i-2}\ (t) = a_{i-2}$$

$$X_i\ (t+1) = \overline{X}_{i-1}\ (t) = \overline{a}_{i-1}$$

$$X_{i+1}\ (t+1) = X_i\ (t) = \overline{a}_i$$

$$\vdots$$

$$X_{j-1}\ (t+1) = X_{j-2}\ (t) = \overline{a}_{j-2}$$

$$X_j\ (t+1) = \overline{X}_{j-1}\ (t) = a_{j-1}$$

$$X_{j+1}\ (t+1) = X_j\ (t) = a_j$$

$$\vdots$$

o que prova a asserção.

Como caso particular tem-se que a asserção continua válida se as negações existirem em andares sucessivos.

Asserção 2

Um registo geral de deslocamento com um número par de negações é equivalente a um registo directo de deslocamento com o mesmo número de andares.

Prova:

Se o número de negações é par podem-se considerar em grupos de duas a duas. Então para o grupo

de andares em que o primeiro contém uma das negações de um grupo e o último a outra pode-se aplicar a regra de equivalência da asserção 1, uma vez que segundo essa regra os únicos valores modificados são os contidos nos andares entre as negações, permitindo assim um tratamento independente para cada grupo de andares.

Asserção 3

Um registo geral de deslocamento com um número ímpar de negações é equivalente a um registo invertido de deslocamento com o mesmo número de andares.

Prova:

Considere-se um estado genérico A e o seu sucessor B no espaço de estados do registo invertido de deslocamento.

Estado A $a_1 \ldots a_i \; a_{i+1} \ldots a_{N-2} \; a_{N-1} \; a_N$

Estado B $\bar{a}_N \; a_1 \ldots a_{i-1} \; a_i \ldots a_{N-3} \; a_{N-2} \; a_{N-1}$

Considerando agora um registo geral com um número ímpar de negações toma-se a primeira negação no primeiro andar por comodidade, o que não faz perder qualquer generalidade.

Supondo ainda que das outras negações a 1.ª está no andar i e a última no j é possível estabelecer uma equivalência entre estados do espaço de estados do registo invertido de deslocamento e do geral, deixando iguais os conteúdos de todos os andares o modificando aqueles que estão entre i e j conforme as asserções 1 e 2.

Em seguida se mostram dois estados sucessivos A e B do espaço do registo invertido e A', B' os equivalentes do geral (os andares i e j estão sublinhados).

$$A \quad a_1 \; a_2 \ldots \underline{a_i} \ldots \underline{a_j} \; a_{j+1} \ldots a_N$$

$$B \quad \bar{a}_N \; a_1 \ldots \underline{a_{i-1}} \ldots \underline{a_{j-1}} \; a_j \ldots a_N$$

$$A' \quad a_1 \; a_2 \ldots \underline{\bar{a}_i} \ldots \underline{a_j} \; a_{j+1} \ldots a_N$$

$$B' \quad \bar{a}_N \; a_1 \ldots \underline{\bar{a}_{i-1}} \ldots \underline{a_{j-1}} \; a_j \ldots a_N$$

B' é o sucessor de A', pelo que empregando a regra descrita se obtêm os espaços de estados equivalentes.

Está assim provado que qualquer registo geral de deslocamento é equivalente a um directo ou a um invertido, pelo que só os espaços de estados destes dois interessam.

CICLOS DAS DUAS ESTRUTURAS INDEPENDENTES

Registo directo de deslocamento

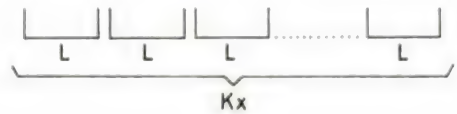
Como a realimentação é directa e supondo que N é o número de andares, tem-se para qualquer andar:

$$X_i \; (t+N) = X_i \; (t)$$

o que obriga a que o máximo comprimento possível de um ciclo seja N.

Além dos ciclos com comprimento N também aqueles com comprimento igual a um factor de N (incluindo 1) existem.

De facto se $N = K \times L$ é possível dividir o registo de deslocamento em K blocos de comprimento L.



Se as configurações dos diversos blocos forem iguais o comprimento do ciclo será L (ou os seus factores) uma vez que o comportamento do sistema é o mesmo que o de um registo directo de deslocamento de comprimento L.

Número de ciclos para cada comprimento

Sendo Q_L o número de estados em ciclos de comprimento L e C_L o número de ciclos com o mesmo comprimento tem-se:

$$C_L = \frac{Q_L}{L}$$

Mas Q_L é 2^L menos o número de estados que pertencem a ciclos com comprimento L' que sejam factores de L (o que corresponde à divisão de cada grupo de L andares em grupos iguais de comprimento L').

Então pode escrever-se uma fórmula iterativa para C_L:

$$C_L = \frac{2^L - \sum_i Q_i \cdot a_i}{L} \qquad \text{onde:}$$

$$\begin{cases} a_i = 1 \text{ se e só se } i \text{ for um factor de } L \\ a_i = 0 \text{ se e só se } i \text{ não for um factor de } L \end{cases}$$

Esta fórmula é sequência directa do número de estados em ciclos de comprimento L:

$$Q_L = 2^L - \sum_i Q_i \cdot a_i$$

Quando $a_i = o$, i não pode ser comprimento de um ciclo, logo não há estados a subtrair a 2^L. Se $a_i = 1$ é necessário ter em conta os estados que existam em ciclos de comprimento i, ou seja Q_i.

Veja-se para registos de deslocamento de comprimentos 1, 2, 3 e 4 os comprimentos e ciclos possíveis:

L = 1

Comprimentos de ciclos: 1.

$Q_1 = 2^1 - 0 = 2 \qquad C_1 = 2.$

L = 2

Comprimentos de ciclos: 1 e 2.

$Q_1 = 2^1 - 0 = 2 \qquad C_1 = 2$

$Q_2 = 2^2 - 2 = 2 \qquad C_2 = 1$

L = 3

Comprimentos de ciclos: 1 e 3.

$Q_1 = 2 \qquad C_1 = 2$

$Q_3 = 2^3 - 2 = 6 \qquad C_3 = 2$

L = 4

Comprimentos de ciclos: 1, 2 e 4.

$Q_1 = 2 \qquad C_1 = 2$

$Q_2 = 2 \qquad C_2 = 1$

$Q_4 = 2^4 - 2 - 2 = 12 \qquad C_4 = 3$

Na Fig. 3 pode ver-se o espaço de estados de um registo de deslocamento de comprimento quatro.

Registo invertido de deslocamento

O comportamento de um registo invertido de deslocamento com N andares pode ser simulado por um registo directo de deslocamento com $2 \times N$ andares em que a configuração da segunda metade é exactamente o complemento da primeira, para cada possível configuração desta última.

$$\underbrace{a_1\ a_2 \ldots a_N}_{N}\ \underbrace{\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_N}_{N}$$

ou seja $X_{i+N}(t) = \overline{X}_i(t)$ para $1 \leqslant i \leqslant N$

Pelo estudo anterior tem-se então que os possíveis ciclos são $2 \times N$ e os seus factores excepto os que sejam simultaneamente factores de N devido à condição $X_{i+N}(t) = \overline{X}_i(t)$.

Por outras palavras os comprimentos de ciclos possíveis L' são os que dão origem a configurações em que o número de blocos L' é ímpar, como se pode ver abaixo.

Formalmente como $X_{i+N}(t) = \overline{X}_i(t)$ tem-se:

$$X_{i+\frac{L'}{2}}(t) = \overline{X}_i(t) \quad \text{e} \quad N = K \times L' + \frac{L'}{2}.$$

O número de ciclos de comprimento L é então:

$$C_L = \frac{Q_L}{L} \quad \text{onde} : \quad Q_L = 2^{L/2} - \sum_i Q_i \cdot a'_i$$

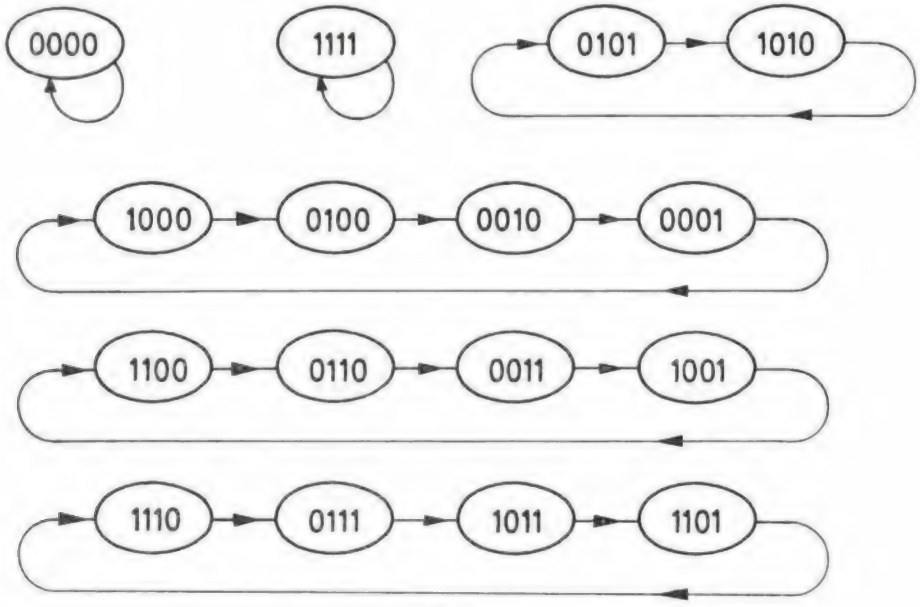


Fig. 3

em que:

$$\begin{cases} a'_i = 1 \quad \text{se e só se} \quad \dfrac{L}{i} = 2K'+1 \\ \\ a'_i = 0 \quad \text{se e só se} \quad \dfrac{L}{i} \neq 2K'+1 \end{cases} \quad \text{com } K' \text{ inteiro}$$

A razão desta fórmula iterativa baseia-se no seguinte:

a) Só existem $2^{L/2}$ estados possíveis para cada grupo de L andares uma vez que só o conteúdo da primeira metade é independente.

b) Há que subtrair os estados já incluídos em ciclos de comprimento $L' < L$, sendo L' um factor de L.

Mas L' tem que obedecer a:

$$L' = \frac{L}{2k'+1}$$

de modo a satisfazer a condição

$$X_{i+\frac{L}{2}}(t) = \overline{X}_i(t)$$

num grupo de L andares e:

$X_{j+\frac{L'}{2}}(t) = \overline{X}_j(t)$ num grupo de L' andares.

Note-se que só ciclos de comprimento par existem neste tipo de estrutura.

Veja-se como exemplo o caso de um registo de deslocamento invertido de comprimento 3.

Factores de 6: 3, 2 e 1.

Factores de 6 não simultaneamente factores de 3:2.

$$Q_6 = 2^3 - Q_2 = 2^3 - 2 = 6 \rightarrow C_6 = \frac{Q_2}{6} = 1$$

$$Q_2 = 2^1 - 0 = 2 \rightarrow C_2 = \frac{Q_2}{2} = 1$$

O espaço de estados é o que segue na Fig. 4.

Conclusão

Dado um registo geral de deslocamento é possível, a partir do seu comprimento e número de negações, achar os seus equivalentes que, ou são um registo de deslocamento directo ou um invertido com o mesmo número de andares.

Para estes dois casos são então achadas fórmulas iterativas que dão o número de ciclos com determinado comprimento.

Vê-se que os registos invertidos de deslocamento têm ciclos apenas de comprimentos pares e têm espaços de estados com ciclos de comprimento maiores.

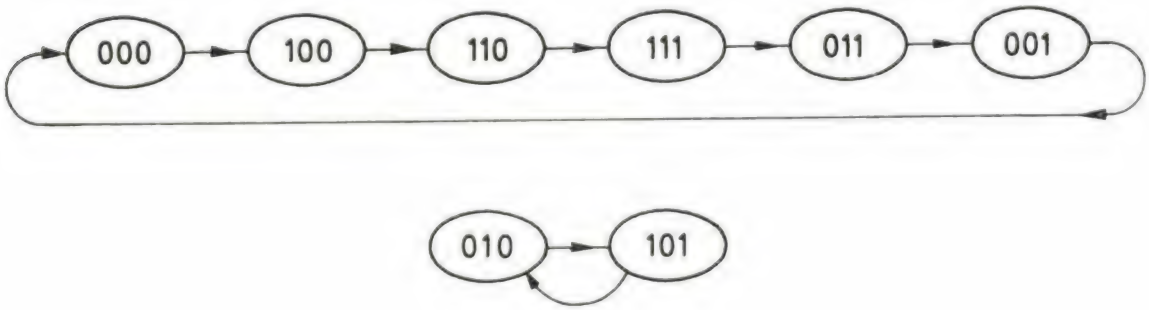


Fig. 4

BIBLIOGRAFIA

[1] «Some Aspects of Simple Cellular Arrays» — Tese de Ph. D. — 1975, Brunel University, José Alberto Baptista Tomé.

[2] «Shift-register Sequences» — Holden Day — 1967 — S. W. Golomb.

Feiras e Exposições

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
INTERCLIMA — Salão Internacional do Ar Condicionado	Paris — França 11 a 16 de Junho
CONSUMENTA — Exposição de Bens de Consumo	Frankfurt — R. F. A. 11 a 19 de Junho
Feira Internacional	Poznan — Polónia 12 a 19 de Junho
3.ª Construção e Arquitectura 77	Berna — Suíça 15 a 22 de Junho
EUROCHEM — Feira da Indústria e da Transformação Química	Birmingham — Reino Unido 20 a 24 de Junho
3.º Salão Internacional e Congresso «Laser-Opto-Elektronik»	Munique — R. F. A. 20 a 24 de Junho
Exposição Internacional dos Materiais de Construção e do Equipamento	Kiev — U. R. S. S. 21 de Junho a 4 de Julho
Feira Internacional	Ndola — Zâmbia 30 de Junho a 5 de Julho

NÚMERO 439 MARÇO DE 1977 ANO LII VOLUME XXXVIII

C. D. U. 513.51/55:513.517

CÓNICAS — Estudo das principais características a partir da sua equação focal[1]

F. PERES RODRIGUES *

SUMÁRIO

Analisa-se neste estudo a partir da equação focal das cónicas, deduzida com base num foco e numa directriz genéricos, as suas principais características:

Género, direcções assimptóticas e assímptotas, centro, directrizes, focos e distância focal, direcções e diâmetros conjugados, eixos e semi-eixos, vértices, invariantes e degenerescências, pondo em destaque a influência da excentricidade.

Por último, analisam-se estas características para algumas posições particulares do foco e da directriz.

SUMMARY

From the focal aquation of the conics, which is obtained from a generical focus and a generical directrix, their main characteristics are analysed:

Type, asymptotic directions and asymptotes, centre, directrixes, focuses and focal distance, conjugate directions and diametres, axes and semi-axes, vertexes, invariants and degeneration, the influence of the eccentricity being emphasized.

Finally, these characteristics are studied for some particular positions of the focus and the directrix.

1 — GERAÇÃO DE UMA CÓNICA. EQUAÇÃO FOCAL

O presente escrito tem por finalidade contribuir para a divulgação do conhecimento das cónicas pondo em evidência, sempre que possível, a excentricidade, os focos e as directrizes em todas as características analisadas. Embora de elaboração menos simples é uma via de estudo abordada por alguns autores, e que se saiba, pouco divulgada entre nós. No que se segue pretendeu ser-se breve sem deixar de focar algumas propriedades que pareceram de realçar e que o tratamento utilizado facilitou pôr em evidência.

Considere-se uma recta r e um ponto F, genéricos, existentes num plano e referidos a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas OXY, Fig 1.

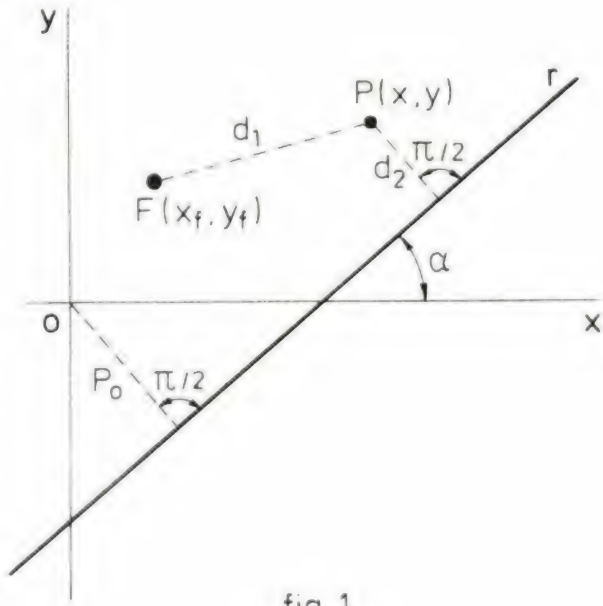


fig. 1

[1] — Recebido para publicação em 10/12/76.

* Especialista do Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC).

Seja:

$$n\,x + l\,y + p = 0$$

ou (1)

$$x \text{ sen } \alpha - y \cos \alpha + p_0 = 0$$

a equação genérica da recta r, em que os coeficientes das duas equações estão ligados pelas relações:

$$\text{sen } \alpha = \frac{n}{\sqrt{l^2 + n^2}}; \quad \cos \alpha = -\frac{l}{\sqrt{l^2 + n^2}}; \quad p_0 = \frac{p}{\sqrt{l^2 + n^2}} \tag{2}$$

sendo p_0 a distância orientada da recta r à origem.

No que vai seguir-se utilizar-se-á sempre a primeira equação (1), tendo em atenção que se se pretender explicitar o ângulo α e a distância p_0 bastará ter em consideração as relações (2).

Considere-se, ainda, um ponto P de coordenadas (x, y) e faça-se a relação ε entre a distância d_1 do ponto P ao ponto F e a distância d_2 do ponto P à recta r, distâncias estas consideradas sempre positivas. De acordo com a fig. 1 será:

$$\varepsilon = \frac{\overline{PF}}{\overline{PN}} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\sqrt{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2}}{\dfrac{nx + ly + p}{\sqrt{l^2 + n^2}}} \geqslant 0 \tag{3}$$

quadrando (3) e ordenando convenientemente, tem-se:

$$(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 = \frac{\varepsilon^2}{l^2 + n^2}(nx + ly + p)^2 \tag{4}$$

ou, desenvolvendo e ordenando em relação às incógnitas:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & [(l^2 + n^2) - n^2 \varepsilon^2]\, x^2 - 2ln\varepsilon^2 xy + \\ & + [(l^2 + n^2) - l^2 \varepsilon^2]\, y^2 - 2\,[(l^2 + n^2)\, x_f + np\varepsilon^2]\, x - \\ & - 2\,[(l^2 + n^2)\, y_f + lp\varepsilon^2]\, y + [(l^2 + \\ & + n^2)\,(x_f^2 + y_f^2) - p^2 \varepsilon^2] = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

A expressão (5), pode tomar a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ -x_f & -y_f & (x_f^2 + y_f^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\varepsilon^2}{l^2 + n^2} \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n^2 & ln & np \\ ln & l^2 & lp \\ np & lp & p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{6}$$

onde a forma quadrática (5) se apresenta como a diferença de duas formas quadráticas, a primeira com os elementos da matriz função das coordenadas do ponto F e a segunda com os elementos da matriz função dos parâmetros da recta r e da relação ε definida em (3).

Como se sabe, a forma quadrática (5) ou (6) define uma cónica em relação à qual se irão determinar algumas propriedades, e denomina-se equação focal da cónica, como adiante se mostrará.

2 — GÉNERO E DIRECÇÕES ASSIMPTÓTICAS

A equação focal (5) pode ser apresentada em coordenadas cartesianas homogéneas mediante a introdução das variáveis X, Y e T ligadas com as primitivas pelas relações:

$$x = \frac{X}{T}; \quad y = \frac{Y}{T} \tag{7}$$

e cuja substituição em (5) conduz a:

$$\begin{aligned} F(X, Y, T) = {} & [(l^2 + n^2) - n^2 \varepsilon^2]\, X^2 - 2\, ln\varepsilon^2\, XY + \\ & + [(l^2 + n^2) - l^2 \varepsilon^2]\, Y^2 - 2\,[(l^2 + n^2)\, x_f + np\,\varepsilon^2]\, XT - \\ & - 2[(l^2 + n^2)\, y_f + lp\,\varepsilon^2]\, YT + \\ & + [(l^2 + n^2)\,(x_f^2 + y_f^2) - p^2 \varepsilon^2]\, T^2 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Dispensa-se, por evidente, a apresentação da forma matricial (6) em coordenadas cartesianas homogéneas.

Como se sabe, o género de uma cónica depende do número de pontos impróprios que a mesma contenha, número esse que poderá ser obtido fazendo em (8) T = 0, dividindo em seguida por X^2 e considerando o coeficiente angular m como:

$$m = \frac{Y}{X}$$

resulta:

$$[(l^2 + n^2) - l^2 \varepsilon^2]\, m^2 - 2\, ln\, \varepsilon^2\, m + [(l^2 + n^2) - n^2 \varepsilon^2] = 0 \tag{9}$$

cujas raízes correspondem aos valores dos coeficientes angulares das tangentes à cónica nos seus pontos impróprios, isto é, das suas assímptotas, pelo que a equação (9) recebe o nome de equação às direcções assimptóticas. A sua resolução conduz a:

$$m_{1,2} = \frac{ln\, \varepsilon^2 \pm (l^2 + n^2)\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(l^2 + n^2) - l^2 \varepsilon^2} \tag{10}$$

Esta expressão corresponderá a 0, 1 ou 2 direcções assimptóticas reais e distintas, isto é, a cónica (5) será do género elipse, parábola ou hipérbole, consoante for, atendendo a (3):

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \varepsilon < 1 & \text{ (género elipse)} \\ \varepsilon = 1 & \text{ (género parábola)} \\ \varepsilon > 1 & \text{ (género hipérbole)} \end{aligned} \tag{11}$$

As condições (11) mostram que a relação ε coincide com a definição de excentricidade de uma cónica, pelo que passará a ser designada como tal.

No caso da parábola, em que a excentricidade ε é igual a 1, as expressões (5) e (10) assumem as formas particulares:

$$f(x, y) = l^2 x^2 - 2lnxy + n^2 y^2 - 2[(l^2 + n^2) x_f + np] x - 2[(l^2 + n^2) y_f + lp] y + [(l^2 + n^2)(x_f^2 + y_f^2) - p^2] = 0$$

e (12)

$$m = \frac{l}{n}$$

verificando-se que a direcção assimptótica m, única, é normal à direcção da recta r (1) considerada na geração da cónica.

No caso do género hipérbole, em que a excentricidade ε é superior à unidade, as duas direcções assimptóticas reais e distintas m_1 e m_2 dadas por (10) têm como direcções bissectoras m_I e m_{II}, normais entre si, as duas direcções obtidas pela expressão:

$$m_{I,II} = \frac{m_2\sqrt{1 + m_1^2} \mp m_1\sqrt{1 + m_2^2}}{\sqrt{1 + m_1^2} \mp \sqrt{1 + m_2^2}} \qquad (13)$$

A substituição em (13) dos valores de m_1 e m_2 dados por (10) conduz aos valores:

$$m_I = -\frac{l}{n}; \quad m_{II} = \frac{n}{l} \qquad (14)$$

verificando-se que estas direcções bissectoras são independentes da excentricidade ε, sendo uma a direcção da recta r (1) e a outra a sua direcção normal.

No caso das cónicas do género elipse, $\varepsilon < 1$, as duas direcções assimptóticas são imaginárias conjugadas, mas continuam a ter como direcções bissectoras as direcções reais dadas por (14).

Como se sabe a circunferência pode ser considerada um caso particular da elipse quando a sua excentricidade ε for nula. Atendendo à definição de ε dada por (3) verifica-se que ε pode ser nula em duas hipóteses, quando $d_1 = \overline{PF}$ for nula ou quando $d_2 = \overline{PN}$ for infinita, isto é r seja a recta imprópria do plano. A primeira hipótese conduz, por substituição de $\varepsilon = 0$ em (4) a:

$$(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 = 0$$

verificando tratar-se de um caso de degenerescência de uma cónica, mais concretamente de uma circunferência, num único ponto real, hipótese que será abordada mais adiante.

Na segunda hipótese de $d_2 = \overline{PN}$ ser infinita, o segundo membro da expressão (4) torna-se indeterminado por ser simultaneamente $\varepsilon = 0$ e $p = \infty$.

Para levantar a indeterminação repare-se que a expressão (4), atendendo a (3), pode ser escrita:

$$(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 = \overline{PF}^2 \left[\frac{\overline{PN}\ \sqrt{l^2 + n^2}}{nx + ly + p}\right] = \overline{PF}^2 = R^2 \qquad (15)$$

por ser, por definição de $\overline{PN}$ (ver fig. 1), igual à unidade a expressão entre parêntesis recto qualquer que seja o valor do parâmetro p, e fazendo igual a R, raio da circunferência, o valor constante $\overline{PF}$. Comparando (4) e (15) resulta:

$$R = \lim_{\varepsilon = 0,\ p = \infty} \frac{\varepsilon(nx + ly + p)}{\sqrt{l^2 + n^2}} = \lim_{\varepsilon = 0,\ p = \infty} \frac{\varepsilon p}{\sqrt{l^2 + n^2}} \qquad (16)$$

De notar que na expressão (16) os parâmetros directores l e n são indeterminados, por serem os da recta imprópria do plano, e que atendendo a (2) se podia ter escrito:

$$R = \lim_{\varepsilon = 0,\ p = \infty} \varepsilon p_0$$

A consideração de (16) em (5) conduz, como seria de esperar, à expressão (15).

No caso da circunferência, as direcções assimptóticas são as direcções isotrópicas do plano, isto é, as direcções de coeficiente angular $\pm i$.

3 — CENTRO

As coordenadas (x_0, y_0) do centro C de uma cónica podem ser obtidas mediante a resolução do sistema de equações:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

em que a função f é dada por (5). Assim, o sistema de equações (17) toma a forma explícita:

$$\begin{cases} [(l^2 + n^2) - n^2\varepsilon^2] x_0 - ln\varepsilon^2 y = (l^2 + n^2) x_f + np\varepsilon^2 \\ -ln\varepsilon^2 x_0 + [(l^2 + n^2) - l^2\varepsilon^2] y_0 = (l^2 + n^2) y_f + lp\varepsilon^2 \end{cases} \qquad (18)$$

Este sistema de equações mostra que o centro de uma cónica é definido pela intersecção de duas rectas, cuja resolução conduz a:

$$\begin{cases} x_0 = x_f + \dfrac{n\varepsilon^2(nx_f + ly_f + p)}{(1 - \varepsilon^2)(l^2 + n^2)} \\ y_0 = y_f + \dfrac{l\varepsilon^2(nx_f + ly_f + p)}{(1 - \varepsilon^2)(l^2 + n^2)} \end{cases} \qquad (19)$$

Das coordenadas do centro de uma cónica deduz-se que o coeficiente angular da recta definida pelo centro C e pelo ponto F é dado por

$$\frac{y_0 - y_f}{x_0 - x_f} = \frac{l}{n} \tag{20}$$

sendo independente da excentricidade ε, isto é, do género da cónica, e normal à recta r.

No caso dos géneros elipse e hipérbole, isto é, da excentricidade ε diferente da unidade, o centro C, de coordenadas x_0 e y_0 dadas por (19), é um ponto próprio, pelo que se designam estas cónicas por centradas.

De notar que em relação à circunferência, atendendo a (16), o centro coincide com o ponto F. No caso do género parábola, $\varepsilon = 1$, o centro torna-se, atendendo a (19) e (20) o ponto impróprio da direcção normal à recta r, pelo que as parábolas se designam por cónicas não centradas ou desprovidas de centro.

4 — FOCOS E DISTÂNCIA FOCAL

Foco de uma cónica pode ser definido como um ponto real ou imaginário, de coordenadas (X, Y), donde as tangentes tiradas à cónica são rectas isotrópicas do plano, portanto, de coeficientes angulares $\pm i$, de equações:

$$y - Y = \pm i\,(x - X) \tag{21}$$

Sendo assim, a substituição de (21) na equação focal da cónica (5) conduzirá a uma equação de 2.º grau, em x ou em y consoante se elimina entre (5) e (21) y ou x, cujo binómio discriminante deverá ser nulo, por condição de tangência, para os valores de X e Y que correspondem às coordenadas dos focos da cónica.

Eliminando y entre (5) e (21) obtém-se a equação de 2.º grau em x, depois de convenientemente ordenada em relação à forma canónica:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\left[\left(l^2 - n^2\right) \pm 2lni\right] x^2 - 2\left\{\left[\left(\varepsilon^2 l^2 - l^2 - n^2\right)X + \varepsilon^2 lnY + \right.\right. \\
&\left. + \left(l^2 + n^2\right) x_f + \varepsilon^2 np\right] \pm \left[-\varepsilon^2 lnX + \left(\varepsilon^2 l^2 - l^2 - n^2\right) Y + \right. \\
&\left.\left. + \left(l^2 + n^2\right) y_f + \varepsilon^2 lp\right] i\right\} x + \left\{\left(\varepsilon^2 l^2 - l^2 - n^2\right)\left(X^2 - Y^2\right) - \right. \\
&- 2\left[\left(l^2 + n^2\right) y_f + \varepsilon^2 lp\right] Y + \left(l^2 + n^2\right)\left(x_f^2 + y_f^2\right) - \varepsilon^2 p^2\Big\} \pm \\
&\pm 2\left\{\left(\varepsilon^2 l^2 - l^2 - n^2\right) XY + \left[\left(l^2 + n^2\right) y_f + \varepsilon^2 lp\right] X\right\} i = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

De notar que a consideração dos sinais mais ou menos incide apenas nos coeficientes das partes imaginárias dos parâmetros em causa.

A anulação do binómio discriminante da equação (22), por ser uma expressão imaginária, conduz a um sistema de 2 equações de 2.º grau em X e Y, desaparencendo a ambiguidade de sinal atrás referida

$$\begin{cases}
\begin{aligned}
&(1 - \varepsilon^2)\left(l^2 + n^2\right)\left(X^2 - Y^2\right) + 2\left[\left(\varepsilon^2 l^2 - l^2 - n^2\right) x_f - \right. \\
&\left. - \varepsilon^2 lny_f - \varepsilon^2 np\right] X + 2\left[\varepsilon^2 lnx_f - \left(\varepsilon^2 n^2 - l^2 - n^2\right) y_f + \right. \\
&\left. + \varepsilon^2 lp\right] Y + \left[\left(l^2 + n^2\right)\left(x_f^2 - y_f^2\right) - \right. \\
&\left. - \varepsilon^2\left(l^2 - n^2\right)\left(x_f^2 + y_f^2\right) + 2\varepsilon^2 p\left(nx_f - ly_f\right)\right] = 0
\end{aligned} \\
\begin{aligned}
&(1 - \varepsilon^2)\left(l^2 + n^2\right) XY + \left[-\varepsilon^2 lny_f + \left(\varepsilon^2 n^2 - l^2 n^2\right) y_f - \right. \\
&\left. - \varepsilon^2 np\right] X + \left[\left(\varepsilon^2 l^2 - l^2 - l^2 - n^2\right) x_f - \varepsilon^2 lny_f - \varepsilon^2 np\right] Y + \\
&+ \left[\varepsilon^2 ln\left(x_f^2 + y_f\right) + \left(l^2 + n^2\right) x_f y_f + \right. \\
&\left. + \varepsilon^2 p\left(lx_f + ny_f\right)\right] = 0
\end{aligned}
\end{cases} \tag{23}$$

em que a 1.ª equação se refere à anulação da parte real e a 2.ª equação à anulação do coeficiente da parte imaginária do binómio discriminante de (22).

A resolução do sistema (23) poderá ser obtida tendo em consideração que cada uma das equações se pode transformar numa soma algébrica de duas parcelas, sendo cada uma destas um produto de dois binómios e havendo nesta transformação apenas quatro binómios diferentes. Assim, o sistema (23) será equivalente ao sistema (24):

$$\begin{cases}
\begin{aligned}
&(X - x_f)\left[(1 - \varepsilon^2)\left(l^2 + n^2\right) X - \left(l^2 + n^2 - \varepsilon^2 l^2 - \right.\right. \\
&\left.\left. + \varepsilon^2 n^2\right) x_f\right] - (Y - y_f)\left[(1 - \varepsilon^2)\left(l^2 + n^2\right) Y - \right. \\
&\left. - \left(l^2 + n^2 + \varepsilon^2 n^2\right) y_f\right] = 0
\end{aligned} \\
\begin{aligned}
&(X - x_f)\left[(1 - \varepsilon^2)\left(l^2 + n^2\right) Y - \left(l^2 + n^2 + \varepsilon^2 l^2 - \right.\right. \\
&\left.\left. - \varepsilon^2 n^2\right) y_f\right] - (Y - y_f)\left[(1 - \varepsilon^2)\left(l^2 + n^2\right) X - \right. \\
&\left. - \left(l^2 + n^2 - \varepsilon^2 l^2 + \varepsilon^2 n^2\right) x_f\right] = 0
\end{aligned}
\end{cases} \tag{24}$$

tornando-se agora fácil a obtenção das suas raízes reais, pela anulação simultânea de dois pares de binómios criteriosamente escolhidos e que conduzirá às coordenadas dos dois focos reais da cónica (5):

$$\begin{cases} X_1 = x_f \\ Y_1 = y_f \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X_2 = x_f + \dfrac{2n\varepsilon^2\left(nx_f + ly_f + p\right)}{(1 - \varepsilon^2)\left(l^2 + n^2\right)} = x_{f'} \\ Y_2 = y_f + \dfrac{2l\varepsilon^2\left(nx_f + ly_f + p\right)}{(1 - \varepsilon^2)\left(l^2 + n^2\right)} = y_{f'} \end{cases} \tag{25}$$

Verifica-se assim que um dos focos obtidos coincide com o ponto F que serviu para a geração da cónica em 1.1, e que o centro da cónica, dado por (19) é o ponto médio do segmento definido pelos dois focos (25), que se passarão a designar por F e F′, pelo que se poderá escrever:

$$\begin{cases} x_f + x_{f'} = 2\,x_0 \\ y_f + y_{f'} = 2\,y_0 \end{cases} \tag{26}$$

sendo este segmento normal à recta r (1).

A análise das expressões (25) mostra que nas cónicas dos géneros elipse e hipérbole, $\varepsilon \neq 1$, os dois focos são pontos próprios, coincidindo ambos com o centro no caso da circunferência, $\varepsilon = 0$, e que no género parábola, $\varepsilon = 1$, um dos focos é o ponto impróprio da direcção normal à recta r (1), tal como se tinha verificado já em relação ao centro, pelo que a parábola tem um único foco a distância finita.

Denomina-se distância focal de uma cónica centrada, a distância entre os seus focos, e semi-distância focal a distância do centro a um dos focos. As expressões (19) ou (25) permitem calcular o valor da semi-distância focal f, que será dada por:

$$f = \frac{\varepsilon^2 \, | nx_f + ly_f + p |}{| 1 - \varepsilon^2 | \sqrt{l^2 + n^2}} \qquad (27)$$

visto ser, por definição, um valor não negativo.

A análise desta expressão mostra que a semi-distância focal f é diferente de zero para as cónicas do género elipse e hipérbole, $\varepsilon \neq 1$, anulando-se para a circunferência atendendo a (16), e se torna infinita para as cónicas de género parábola, $\varepsilon = 1$.

5 — DIRECTRIZES

As directrizes de uma cónica podem ser definidas como as polares dos focos em relação à cónica.

Duma forma geral, a polar de um ponto em relação a uma cónica é a recta lugar geométrico dos conjugados harmónicos do ponto dado em relação aos pontos em que a cónica é cortada por uma secante genérica passando por esse ponto.

Demonstra-se que em coordenadas cartesianas homogéneas, a equação da polar dum ponto $P(X_p, Y_p, T_p)$ em relação à cónica (8) é dada por:

$$X_p \frac{\partial F}{\partial X} + Y_p \frac{\partial F}{\partial Y} + T_p \frac{\partial F}{\partial T} = 0 \qquad (28)$$

sendo $\frac{\partial F}{\partial X}$, $\frac{\partial F}{\partial Y}$ e $\frac{\partial F}{\partial T}$ as derivadas parciais de (8), dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X} &= [(l^2 + n^2) - n^2 \varepsilon^2] X - ln \varepsilon^2 Y - \\
&\quad + [(l^2 + n^2) x_f + np \varepsilon^2] T \\
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y} &= - ln \varepsilon^2 X + [l^2 + n^2) - l^2 \varepsilon^2] Y - \\
&\quad - [(l^2 + n^2) y_f + lp \varepsilon^2] T \\
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial T} &= - [(l^2 + n^2) x_f + np \varepsilon^2] X - \\
&\quad - [(l^2 + n^2) y_f + lp \varepsilon^2] Y + \\
&\quad + [(l^2 + n^2) (x_f^2 + y_f^2) - p^2 \varepsilon^2] T \qquad (29)
\end{aligned}$$

As substituições em (28), dos valores dados por (29) e das coordenadas cartesianas homogéneas do foco F (X_f, Y_f, T_f), conduzem, depois das convenientes ordenações e simplificações e consequente passagem a coordenadas cartesianas (7), à equação da directriz:

$$nx + ly + p = 0 \qquad (30)$$

que se verifica coincidir com a recta r (1) considerada na geração da cónica (5) ou (8).

As substituições em (28), dos valores (29) e das coordenadas cartesianas homogéneas do 2.º foco F', tendo em atenção (26), conduzem, depois das convenientes ordenações e simplificações e consequente passagem a coordenadas cartesianas (7), à equação da 2.ª directriz r':

$$nx + ly + p - \frac{2(nx_f + ly_f + p)}{1 - \varepsilon^2} = 0 \qquad (31)$$

verificando-se serem as duas directrizes (30) e (31) paralelas entre si e afastadas de:

$$\delta = \frac{2 \, | nx_f + ly_f + p |}{| 1 - \varepsilon^2 | \sqrt{l^2 + n^2}} \qquad (32)$$

distância δ esta ligada com a semi-distância focal f (27) pela expressão:

$$\delta = \frac{2f}{\varepsilon^2} \qquad (33)$$

A análise da expressão (31) mostra que em relação à parábola, $\varepsilon = 1$, a 2.ª directriz r' é a recta imprópria do plano, podendo-se agora afirmar que as cónicas do género parábola têm um foco F e uma directriz r a distância finita ou própria, e um foco F' e uma directriz r' a distância infinita ou imprópria.

Para que a expressão (5) represente todos os pontos da cónica será necessário, que a cónica de excentricidade ε gerada a partir do foco F' (25) e da directriz r' (31) tenha a referida expressão (5) como equação definidora.

Assim, designando por p', o termo independente de (31), ou seja:

$$p' = p - \frac{2(nx_f + ly_f + p)}{1 - \varepsilon^2} \qquad (34)$$

tem-se, de acordo com a fig. 2 e atendendo ao exposto em 1.1;

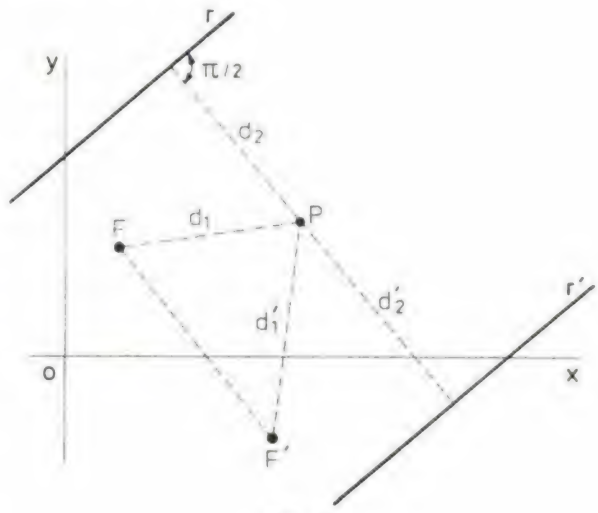


Fig. 2

$$\varepsilon = \frac{d'_1}{d'_2} = \frac{\sqrt{(x-x_{f'})^2+(y-y_{f'})^2}}{\dfrac{nx+ly+p'}{\sqrt{l^2+n^2}}} \geqslant 0 \qquad (35)$$

Substituindo em (35) os valores de $x_{f'}$ e $y_{f'}$ dados por (25) e o valor de p' dado por (34), quadrando e ordenando convenientemente resulta a expressão (5), o que prova representar esta expressão, com toda a generalidade, qualquer cónica e todos os seus pontos.

Do exposto se infere que uma cónica fica bem definida se forem dados a sua excentricidade, um foco e uma directriz.

A análise conjunta das expressões (1), (25), (31) e (33) mostra que, para uma mesma cónica:

— são iguais as distâncias entre os focos e as directrizes que lhe estão associados;

— nas cónicas género elipse, $\varepsilon < 1$, os focos ficam compreendidos entre as directrizes, coincidindo aqueles e estas para $\varepsilon = 0$, em que a elipse toma a forma particular de uma circunferência com centro no foco comum e tendo por directriz comum a recta imprópria do seu plano, por serem infinitos os termos independentes de (30) e (31):

$$\lim_{\varepsilon=0,\, p=\infty} \left[p - \frac{2\,(nx_f+ly_f+p)}{1-\varepsilon^2} \right]$$

$$= -\lim_{\varepsilon=0,\, p=\infty} p\,\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} - 2 \lim_{\varepsilon=0} \frac{nx_f+ly_f}{1-\varepsilon^2} = -\infty$$

— nas cónicas género hipérbole, $\varepsilon > 1$, as directrizes ficam compreendidas entre os focos, sendo no caso particular de $\varepsilon = \sqrt{2}$, hipérbole equilátera, a distância entre os focos dupla da distância entre as directrizes;

— em todas as cónicas a recta contendo os focos e o centro é normal à direcção comum da directrizes.

6 — DIRECÇÕES E DIÂMETROS CONJUGADOS

Dada uma direcção definida pelo seu coeficiente angular m, diz-se diâmetro duma cónica conjugado com essa direcção, o lugar geométrico dos meios das cordas da cónica que são colineares com a direcção dada.

Demonstra-se, a partir desta definição, que o diâmetro conjugado de uma cónica com a direcção m é dada pela equação diferencial:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + m\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (36)$$

a qual tendo em consideração (5) conduz à recta:

$$y = \frac{\ln \varepsilon^2 m - [(l^2+n^2) - n^2\varepsilon^2]}{[(l^2+n^2) - l^2\varepsilon^2]\,m - \ln \varepsilon^2}\,x + \frac{[(l^2+n^2)\,y_f + lp\,\varepsilon^2]\,m + [(l^2+n^2)\,x_f + np\,\varepsilon^2]}{[(l^2+n^2) - l^2\varepsilon^2]\,m - \ln \varepsilon^2} \qquad (37)$$

Designado por m' o coeficiente angular do diâmetro conjugado (37) com a direcção m, tem-se:

$$m' = \frac{\ln \varepsilon^2 m - [(l^2+n^2) - n^2\varepsilon^2]}{[(l^2+n^2) - l^2\varepsilon^2]\,m - \ln \varepsilon^2} \qquad (38)$$

ou:

$$[(l^2+n^2) - l^2\varepsilon^2]\,mm' - \ln \varepsilon^2\,(m+m') + [(l^2+n^2) - n^2\varepsilon^2] = 0 \qquad (39)$$

o que prova, dada a simetria desta expressão em relação às direcções m e m', que estas são conjugadas uma da outra, pelo que a equação (39) se denomina equação às direcções conjugadas.

De notar que o valor do coeficiente angular m' (38) é independente das coordenadas dos focos, dependendo apenas da excentricidade e da direcção comum das directrizes da cónica.

As condições (17) são soluções particulares da equação diferencial (36), o que mostra que todos os diâmetros conjugados com uma dada direcção m, passam pelo centro da cónica. O mesmo se concluiria, verificando que as coordenadas do centro (19) da cónica satisfazem a equação (37).

No caso da circunferência, $\varepsilon = 0$, a expressão (39) reduz-se a $mm'+1=0$, o que mostra que as direcções conjugadas são sempre normais entre si.

No caso das cónicas do género parábola, $\varepsilon = 1$ as expressões (37) e (38) assumem, respectivamente, os valores particulares:

$$y = \frac{1}{n}\,x + \frac{(l^2+n^2)(x_f+my_f) + p\,(lm+n)}{n(nm-1)} \qquad (40)$$

e

$$m' = \frac{1}{n} \qquad (41)$$

o que prova que a direcção conjugada m' de uma dada direcção m, é constante e independentemente desta, sendo normal à direcção da directriz r e contendo como ponto impróprio o centro da parábola.

7 — EIXOS E ASSIMPTOTAS

Duas direcções conjugadas dizem-se principais, quando forem normais entre si, e os diâmetros que lhes estão associados recebem o nome de diâmetros principais ou eixos da cónica. A perpendicularidade das direcções conjugadas obtém-se fazendo em (39):

$$m' = -\frac{1}{m} \qquad (42)$$

donde resulta:

$$l\,n\,m^2-(l^2-n^2)m-ln=0 \qquad (43)$$

esta expressão mostra que as direcções principais de uma cónica apenas dependem da direcção das suas directrizes, sendo independentes da excentricidade e das coordenadas dos focos.

A resolução de (43) dá:

$$m_1=-\frac{n}{l}\,;\quad m_2=\frac{l}{n} \qquad (44)$$

o que mostra serem a direcção das directrizes e a direcção normal, as duas direcções principais de uma cónica.

No caso particular da circunferência, $\varepsilon=0$, todas as direcções conjugadas são direcções principais, pois, como se viu em 6, todas as direcções conjugadas são normais entre si.

Sendo os eixos de uma cónica os seus diâmetros principais, que passam necessariamente pelo centro, as suas equações de definição serão dadas por:

$$\begin{aligned} y-y_0 &= m_1\,(x-x_0) \\ y-y_0 &= m_2\,(x-x_0) \end{aligned} \qquad (45)$$

substituindo nestas equações os valores de (x_0, y_0), m_1 e m_2 dados, respectivamente, por (19) e (44) resulta, finalmente:

$$nx+ly+p-\frac{nx_f+ly_f+p}{1-\varepsilon^2}=0 \qquad (46)$$

$$lx-ny-lx_f+ny_f=0 \qquad (47)$$

A equação (46) refere-se ao eixo paralelo às directrizes e simétrico em relação a estas, denominado eixo conjugado, devendo como verificação, o seu termo independente ser igual à média arimétrica dos valores de p e p′ dados por (34), donde se tem:

$$\frac{p+p'}{2}=p-\frac{nx_f+ly_f+p}{1-\varepsilon^2} \qquad (48)$$

A equação (47) refere-se ao eixo normal às directrizes e verifica-se facilmente que passa pelo foco F, e como passa obrigatoriamente pelo centro, passará pelo outro foco F′, denominando-se assim eixo dos focos ou eixo transverso.

Em relação à circunferência, $\varepsilon=0$, a equação (46) reduz-se à equação (47) e como o foco F coincide com o centro, pode afirmar-se que qualquer recta passando pelo centro da circuferência é simultaneamente eixo conjugado e eixo transverso, o que conduz, portanto, à sua indeterminação.

No caso das cónicas de género parábola, $\varepsilon=1$, as expressões (46) e (47) mostram que o eixo conjugado se torna a recta imprópria do plano e o eixo transverso passa pelo único foco a distância finita e é normal à directriz própria.

As assímptotas de uma cónica são, como se sabe, as rectas tangentes às cónicas nos seus pontos impróprios, e passam obrigatoriamente pelo centro da cónica. A análise conjunta das equações às direcções assimptóticas (9) e às direcções conjugadas (39) mostra que estas equações se tornam iguais quando for m = m′, pelo que se pode definir as assímptotas, também, como os diâmetros conjugados com a sua própria direcção. Assim, poder-se-á escrever, atendendo a (10):

$$y-y_0=\frac{l\,n\,\varepsilon^2\pm(l^2+n^2)\sqrt{\varepsilon^2-1}}{(l^2+n^2)-l^2\,\varepsilon^2}\,(x-x_0) \qquad (49)$$

ou, ainda, tendo em consideração (19):

$$\begin{aligned} y-y_f=&\frac{l\,n\,\varepsilon^2\pm(l^2+n^2)\sqrt{\varepsilon^2-1}}{(l^2+n^2)-l^2\,\varepsilon^2}\,(x-x_f)- \\ &-\frac{\varepsilon^2\,[l\,(1-\varepsilon^2)\mp n\sqrt{\varepsilon^2-1}]}{(\varepsilon^2-1)\,[(l^2+n^2)-l^2\,\varepsilon^2]}\,(nx_f+ly_f+p) \end{aligned} \qquad (50)$$

A análise conjunta das equações (49) e (50) das assímptotas mostra que as cónicas do género hipérbole, $\varepsilon>1$, têm duas assímptotas reais e distintas, as cónicas do género elipse, $\varepsilon<1$, são desprovidas de assímptotas reais sendo estas para a circunferência as rectas isotrópicas passando pelo centro, e as cónicas do género parábola, $\varepsilon=1$, têm duas assímptotas coincidentes na recta imprópria do plano.

8 — VÉRTICES E SEMI-EIXOS

Os vértices de uma cónica são definidos como os pontos de encontro dos diâmetros principais ou eixos com a cónica. As coordenadas dos dois vértices existentes no eixo conjugado obêm-se resolvendo o sistema de equações (5) e (46), o que permite escrever:

$$V_1\begin{cases} x_1=x_f+\dfrac{\varepsilon\,(n\,\varepsilon+l\sqrt{1-\varepsilon^2})\,(nx_f+ly_f+p)}{(1-\varepsilon^2)\,(l^2+n^2)} \\[2ex] y_1=y_f+\dfrac{\varepsilon\,(n\,\varepsilon+l\sqrt{1-\varepsilon^2})\,(nx_f+ly_f+p)}{(1-\varepsilon^2)\,(l^2+n^2)} \end{cases} \qquad (51)$$

$$V_2\begin{cases} x_2=x_f+\dfrac{\varepsilon\,(n\,\varepsilon-l\sqrt{1-\varepsilon^2})\,(nx_f+ly_f+p)}{(1-\varepsilon^2)\,(l^2+n^2)} \\[2ex] y_2=y_f+\dfrac{\varepsilon\,(l\,\varepsilon-n\sqrt{1-\varepsilon^2})\,(nx_f+ly_f+p)}{(1-\varepsilon^2)\,(l^2+n^2)} \end{cases} \qquad (52)$$

A análise destas coordenadas mostra que nas nas cónicas do género hipérbole, $\varepsilon>1$, estes vértices são dois pontos imaginários, do género elipse, $\varepsilon<1$, são dois pontos reais e próprios, e do género pará-

bola, $\varepsilon = 1$, são dois pontos impróprios coincidentes e correspondentes à direcção normal à directriz r.

As coordenadas dos dois vértices existentes no eixo transverso obtêm-se a partir da resolução do sistema de equações (5) e (47), a qual permite escrever:

$$V_3 \begin{cases} x_3 = x_f + \dfrac{n\,\varepsilon\,(nx_f + ly_f + p)}{(1-\varepsilon)\,(l^2+n^2)} \\ y_3 = y_f + \dfrac{l\,\varepsilon\,(nx_f + ly_f + p)}{(1-\varepsilon)\,(l^2+n^2)} \end{cases} \tag{53}$$

$$V_4 \begin{cases} x_4 = x_f - \dfrac{n\,\varepsilon\,(nx_f + ly_f + p)}{(1+\varepsilon)\,(l^2+n^2)} \\ y_4 = y_f - \dfrac{l\,\varepsilon\,(nx_f + ly_f + p)}{(1+\varepsilon)\,(l^2+n^2)} \end{cases} \tag{54}$$

A análise destas coordenadas mostra que os dois vértices correspondentes ao eixo transverso, são dois pontos reais e próprios para as cónicas dos géneros hipérbole e elipse, $\varepsilon \neq 1$, e que nas cónicas do género parábola, $\varepsilon = 1$, o vértice V_3 se torna o ponto impróprio do eixo transverso sendo real e próprio o vértice V_4 e de coordenadas:

$$x_4 = x_f - \frac{n(nx_f + ly_f + p)}{2\,(l^2+n^2)} \qquad y_4 = y_f - \frac{l\,(nx_f + ly_f + p)}{2\,(l^2+n^2)} \tag{55}$$

No que se refere à circunferência, $\varepsilon = 0$ e $p = \infty$, as coordenadas dos quatro vértices, tendem para os valores:

$$\begin{aligned} -x_1 = x_2 = -y_3 = y_4 &= -\frac{l}{\sqrt{l^2+n^2}}\,R = R\,\cos\alpha \\ -y_1 = y_2 = -x_3 = x_4 &= -\frac{n}{\sqrt{l^2+n^2}}\,R = R\,\operatorname{sen}\alpha \end{aligned} \tag{56}$$

o que permite afirmar, dada a indeterminação de l e n no caso particular da circunferência (ver 2), que quaisquer quatro pontos pertencentes a dois diâmetros normais entre si podem ser vértices da circunferência, diâmetros esses que poderão ser indistintamente considerados como eixos conjugado e transverso.

Define-se semi-eixo de uma cónica o módulo da distância entre o centro e um dos seus vértices. Assim haverá um semi-eixo conjugado referente aos vértices existentes no eixo conjugado e um semi-eixo transverso referente aos vértices existentes no eixo transverso.

Atendendo à definição dada e aos valores das coordenadas do centro da cónica (19) e dos vértices da mesma (51), (52), (53) e (54), tem-se para semi-eixo conjugado:

$$q = \frac{\varepsilon\,|nx_f + ly_f + p|}{\sqrt{|1-\varepsilon^2|\,(l^2+n^2)}} \tag{57}$$

e para semi-eixo transverso:

$$t = \frac{\varepsilon\,|nx_f + ly_f + p|}{|1-\varepsilon^2|\,\sqrt{l^2+n^2}} \tag{58}$$

considera-se, ainda ,a relação dos semi-eixos:

$$\frac{t}{q} = \frac{1}{\sqrt{|1-\varepsilon^2|}} \tag{59}$$

A análise conjunta das expressões (57), (58) e (59) permite afirmar que em relação às cónicas do género elipse, $\varepsilon < 1$, os dois semi-eixos existem e o semi-eixo transverso é sempre maior que o semi-eixo conjugado; no caso particular da circunferência, os dois semi-eixos se tornam iguais ao raio R. Para as cónicas do género hipérbole, $\varepsilon > 1$, embora os vértices referentes ao eixo conjugado sejam pontos imaginários, existem os dois semi-eixos, sendo o semi-eixo transverso maior que o semi-eixo conjugado para $\sqrt{2} > \varepsilon > 1$ (hipérboles achatadas), igual para $\varepsilon = \sqrt{2}$ (hipérboles equiláteras) e menor para $\varepsilon > \sqrt{2}$ (hipérboles alongadas). Para as cónicas do género parábola, $\varepsilon = 1$, os dois semi-eixos tornam-se infinitos, embora a fórmula (59) indique que o semi-eixo transverso é um infinitamente grande de ordem superior em relação ao semi-eixo conjugado.

A fórmula (59) permite expressar a excentricidade em função dos semi-eixos; para as cónicas do género elipse, tem-se:

$$\frac{t}{q} = \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} \Longleftrightarrow \varepsilon = \frac{\sqrt{t^2-q^2}}{t} \tag{60}$$

e para as cónicas do género hipérbole, tem-se:

$$\frac{t}{q} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \Longleftrightarrow \varepsilon = \frac{\sqrt{t^2+q^2}}{t} \tag{61}$$

A consideração simultânea das fórmulas (27) e (58) permite relacionar a semi-distância focal f, o semi-eixo transverso t e a excentricidade ε, por:

$$f = \varepsilon\,t \tag{62}$$

donde poder afirmar-se que a semi-distância focal é inferior ao eixo transverso para as elipses, $\varepsilon < 1$, nula para a circunferência, $\varepsilon = 0$, infinitamente grande equivalente ao semi-eixo transverso no caso das parábolas, $\varepsilon = 1$, e superior ao semi-eixo transverso para as hipérboles, $\varepsilon > 1$.

De (60), (61) e (62) resulta, para as cónicas do género elipse:

$$f^2 = t^2 - q^2 \tag{63}$$

e para as cónicas do género hipérbole:

$$f^2 = t^2 + q^2 \tag{64}$$

9 — INVARIANTES E DEGENERESCÊNCIA

Certas relações dos coeficientes das equações de uma cónica conservam o seu valor, independentemente da posição do sistema de eixos considerado, essas relações denominam-se invariantes das cónicas. Esta afirmação implica que nas equações definidoras da cónica se igualem os coeficientes dos termos em x^2 ou em y^2.

Designando a equação genérica de uma cónica pela forma quadrática completa:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = \\ = [x\ y\ 1] \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{65}$$

verifica-se que são invariantes da cónica relativamente a um sistema de eixos fazendo entre si um ângulo θ, as três seguintes relações:

invariante linear $$I_1 = \frac{A + C - 2B \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \tag{66}$$

invariante quadrático $$I_2 = \frac{B^2 - AC}{\operatorname{sen}^2 \theta} \tag{67}$$

invariante cúbico $$I_3 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \tag{68}$$

Se o sistema de eixos considerado for ortogonal, os três invariantes tomam a forma particular:

$$I_1 = A + C \tag{69}$$

$$I_2 = B^2 - AC \tag{70}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \tag{71}$$

A comparação da equação (5) com a equação (65) permite escrever a relação entre os coeficientes homónimos:

$$\begin{cases} A = (l^2 + n^2) - n^2 \varepsilon \\ B = -\ln \varepsilon^2 \\ C = (l^2 + n^2) - l^2 \varepsilon^2 \\ D = -[(l^2 + n^2)\, x_f + np\, \varepsilon^2] \\ E = -[(l^2 + n^2)\, y_f + lp\, \varepsilon^2] \\ F = (l^2 + n^2)(x_f{}^2 + y_f{}^2) - p^2 \varepsilon^2 \end{cases} \tag{72}$$

Substituindo nos invariantes (69), (70) e (71) os valores dados por (72) obtém-se:

$$I_1 = (l^2 + n^2)(2 - \varepsilon^2) \tag{73}$$

$$I_2 = -(l^2 + n^2)^2 (1 - \varepsilon^2) \tag{74}$$

$$I_3 = -\varepsilon^2 (l^2 + n^2)^2 (nx_f + ly_f + p)^2 \tag{75}$$

O invariante linear I_1 dado por (73) mostra que o seu valor é positivo para cónicas com a excentricidade $\varepsilon < \sqrt{2}$, isto é, para todas as elipses incluindo a circunferência, para todas as parábolas e para as hipérboles achatadas, nulo para as hipérboles equiláteras, traduzido pela simetria dos coeficientes de x^2 e y^2 ou anulação simultânea, e negativo para as hipérboles alongadas.

O invariante quadrático I_2 dado por (74) anula-se para as cónicas do género parábola, estando o seu sinal ligado ao género da cónica, positivo para as cónicas do género hipérbole e negativo para as cónicas do género elipse; de notar que este invariante assume valores simétricos para a circunferência, $\varepsilon = 0$, e para o hipébole equilátera, $\varepsilon = \sqrt{2}$.

O invariante cúbico I_3 é sempre negativo para qualquer género de cónica, anulando-se para os casos de degenerescência. Uma cónica diz-se degenerescente quando a equação que a define pode ser decomposta num produto nulo de duas formas lineares, o que acarreta a anulação do seu invariante cúbico I_3, ou seja, do determinante (71) ou (75) associado à cónica.

A anulação do invariante I_3 pode dar-se quando for nulo ε ou $nx_f + ly_f + p$, pois $l^2 + n^2$, por definição, não se pode anular. Analisa-se em separado, as duas hipóteses possíveis.

1.ª Hipótese $\varepsilon = 0$

Esta hipótese, consoante o valor do terceiro factor de (75), desdobra-se em:

a) $nx_f + ly_f + p \neq \infty$

a equação (5) da cónica assume o valor particular, depois de simplificada:

$$(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 = 0 \tag{76}$$

mostrando que a cónica degenera num ponto real coincidente com o foco F, e também, de acordo com (19) e (25) com o centro e o outro foco. Este caso de degenerescência é independente das posições das duas directrizes, que são rectas próprias, podendo até serem coincidentes e como tal conterem o próprio foco, isto é, o ponto real correspondente à degenerescência.

b) $nx_f + ly_f + p = \infty$

Neste caso o valor do invariante I_3 torna-se indeterminado, e atendendo a (16), o levantamento de indeterminação conduz a:

$$I_3 = -(l^2 + n^2)^3 \left[\lim_{\substack{\varepsilon \to 1 \\ p = \infty}} \frac{\varepsilon(nx_f + ly_f + p)}{\sqrt{l^2 + n^2}} \right]^2 =$$

$$= -(l^2 + n^2)^3 R^2 \qquad (77)$$

o que prova tratar-se de uma circunferência de raio R, como se tinha já visto em 2, não sendo portanto, um caso de degenerescência, a não ser quando o raio R se anule, caindo-se assim na alínea *a*).

2.ª *Hipótese* $nx_f + ly_f + p = 0$

Esta hipótese, que se traduz na existência do foco sobre a directriz, considerada na equação (5) da cónica, permite depois das convenientes operações, escrever:

$$[(l^2 + n^2) - n^2 \varepsilon^2](x - x_f)^2 - 2 \ln \varepsilon^2 (x - x_f)(y - y_f) +$$
$$+ [(l^2 + n^2) - l^2 \varepsilon^2](y - y_f)^2 = 0 \qquad (78)$$

mostrando que o foco pertence à própria degenerescência da cónica.

A expressão (78) pode ser transformada num produto nulo de duas formas lineares, pelo que se pode substituir pelas duas expressões equivalentes:

$$[(l^2 + n^2) - l^2 \varepsilon^2](y - y_f) -$$
$$- [\ln \varepsilon^2 + (l^2 + n^2)\sqrt{\varepsilon^2 - 1}](x - x_f) = 0 \qquad (79)$$

$$[(l^2 + n^2) - l^2 \varepsilon^2](y - y_f) -$$
$$- [\ln \varepsilon^2 - (l^2 + n^2)\sqrt{\varepsilon^2 - 1}](x - x_f) = 0$$

o que permite afirmar que a cónica degenera em duas rectas concorrentes no foco F, rectas estas que coincidem com as assímptotas indicadas em (50) quando nela se introduz a hipótese formulada. Por outro lado, esta mesma hipótese considerada nas coordenadas (25) do foco F', nas coordenadas (19) de centro, e nas coordenadas (51), (52), (53) e (54) dos vértices, conduz à coincidência de todos estes pontos, desde que $\varepsilon \neq 1$.

A análise das expressões (79), tendo em atenção o valor da excentricidade, permite considerar os casos particulares seguintes:

a) $0 \leqslant \varepsilon < 1$:

As duas rectas tornam-se imaginárias, embora cruzando-se no foco real F, que será a degenerescência das cónicas do género elipse; no caso de $\varepsilon = 0$ as duas rectas são as rectas isotrópicas passando pelo foco considerado.

b) $\varepsilon = 1$:

Neste caso, as duas rectas (79) reduzem-se a duas rectas coincidentes, de equação:

$$n(y - y_f) - l(x - x_f) = 0 \qquad (80)$$

que passam pelo foco F e são normais à directriz r (1), degenerescência, portanto, das cónicas do género parábola.

c) $\varepsilon > 1$:

As duas rectas (79), degenerescência das cónicas do género hipérbole, são reais, cruzam-se no foco F no qual coincidem também o centro, o foco F' e os quatro vértices, e são bissectadas pela directriz (ver 2).

10 — POSIÇÕES PARTICULARES DO FOCO E DA DIRECTRIZ

A equação focal (5) da cónica e as expressões definidoras das características estudadas assumem aspectos particulares para determinadas posições do foco e da directriz considerados em 1; serão analisadas a seguir seis posições particulares.

10.1 — Directriz qualquer e foco na origem

Este caso particular implica que seja:

$$x_f = y_f = 0$$

pelo que a equação focal (5) se reduz a:

$$[(l^2 + n^2) - n^2 \varepsilon^2] x^2 - 2 \ln \varepsilon^2 xy + [(l^2 + n^2) - l^2 \varepsilon^2] y^2 -$$
$$- 2 np \varepsilon^2 x - 2 lp \varepsilon^2 y - p^2 \varepsilon^2 = 0 \qquad (81)$$

No caso particular da parábola, (12) ou (81) reduzem-se a:

$$l^2 x^2 - 2 lnxy + n^2 y^2 - 2 npx - 2 lpy - p^2 = 0 \qquad (82)$$

e para a circunferência, em que é $\varepsilon = 0$ e $p = \infty$, será, atendendo a (16):

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (83)$$

visto que, como se sabe, os focos e o centro coincidem.

A equação às direcções assimptóticas (9) mantém-se, por ser independente das coordenadas do foco.

As coordenadas do centro (19) passam a ser, para as cónicas centradas:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{np\,\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(l^2+n^2)} \\[2ex] y_0 = \dfrac{lp\,\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(l^2+n^2)} \end{cases} \tag{84}$$

e o segundo foco, atendendo a (26):

$$\begin{cases} x_{f'} = 2\,x_0 \\ y_{f'} = 2y_0 \end{cases} \tag{85}$$

A semi-distância focal (27) será dada por:

$$f = \frac{\varepsilon^2\,|p|}{|1-\varepsilon^2|\sqrt{l^2+n^2}} \tag{86}$$

A segunda directriz (31) será definida pela equação:

$$nx + ly - p\,\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} = 0 \tag{87}$$

e a distância entre as directrizes dada por:

$$\delta = \frac{2\,|p|}{|1-\varepsilon^2|\sqrt{l^2+n^2}} \tag{88}$$

A equação às direcções conjugadas (39) mantém-se, por ser independente das coordenadas do foco, sendo a equação do diâmetro conjugado (37) com a direcção m, em relação às cónicas centradas dada por:

$$y = \frac{l\,n\,\varepsilon^2\,m - [(l^2+n^2) - n^2\,\varepsilon^2]}{[(l^2+n^2) - l^2\,\varepsilon^2]\,m - l\,n\,\varepsilon^2}\,x + \\ + \frac{p\,\varepsilon^2\,(lm+n)}{[(l^2+n^2) - l^2\,\varepsilon^2]\,m - l\,n\,\varepsilon^2} \tag{89}$$

e em relação à parábola (40), dada por:

$$y = \frac{l}{n}\,x + \frac{p(lm+n)}{n(nm-l)} \tag{90}$$

A equação às direcções principais (43) mantém-se, reduzindo-se as equações dos eixos conjugado (46) e transverso (47), respectivamente, às expressões:

$$nx + ly - p\,\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} = 0 \tag{91}$$

$$lx - ny = 0 \tag{92}$$

tornando-se o eixo conjugado (91) a recta imprópria do plano para as cónicas do género parábola.

As equações das assímptotas (50) reduzem-se a:

$$y = \frac{l\,n\,\varepsilon^2 \pm (l^2-n^2)\sqrt{\varepsilon^2-1}}{(l^2-n^2) - l^2\,\varepsilon^2}\,x - \\ - \frac{p\,\varepsilon^2\,[l\,(1-\varepsilon^2) \mp n\sqrt{\varepsilon^2-1}]}{(\varepsilon^2-1)\,[(l^2+n^2) - l^2\,\varepsilon^2]} \tag{93}$$

As coordenadas dos quatro vértices (51) a (54) das cónicas centradas assumem os valores:

$$V_1 \left[x_1 = \frac{p\varepsilon(n\varepsilon + l\sqrt{1-\varepsilon^2})}{(1-\varepsilon^2)(l^2+n^2)}\,;\; y_1 = \frac{p\,\varepsilon\,(l\varepsilon - n\sqrt{1-\varepsilon^2})}{(1-\varepsilon^2)(l^2+n^2)} \right] \tag{94}$$

$$V_2 \left[x_2 = \frac{p\,\varepsilon\,(n\varepsilon + l\sqrt{1-\varepsilon^2})}{(1-\varepsilon^2)(l^2+n^2)}\,;\; y_2 = \frac{p\varepsilon(l\varepsilon + n\sqrt{1-\varepsilon^2})}{(1-\varepsilon^2)(l^2+n^2)} \right] \tag{95}$$

$$V_3 \left[x_3 = \frac{np\,\varepsilon}{(1-\varepsilon)(l^2+n^2)}\,;\; y_3 = \frac{lp\,\varepsilon}{(1-\varepsilon)(l^2+n^2)} \right] \tag{96}$$

$$V_4 \left[x_4 = \frac{np\,\varepsilon}{(1+\varepsilon)(l^2+n^2)}\,;\; y_4 = \frac{lp\,\varepsilon}{(1+\varepsilon)(l^2+n^2)} \right] \tag{97}$$

sendo para a parábola, o único vértice próprio o V_4 (55) de coordenadas:

$$V_4 \left[x_4 = \frac{np}{2\,(l^2+n^2)}\,;\; y_4 = \frac{lp}{2(l^2+n^2)} \right] \tag{98}$$

Os semi-eixos conjugado (57) e tranverso (58) serão dados pelas expressões:

$$q = \frac{\varepsilon\,|p|}{\sqrt{|1-\varepsilon^2|\,(l^2+n^2)}} \tag{99}$$

$$t = \frac{\varepsilon\,|p|}{|1-\varepsilon^2|\sqrt{(l^2+n^2)}} \tag{100}$$

Os invariantes I_1 (73) e I_2 (74) mantêm-se e o invariante I_3 (75) reduz-se a:

$$I_3 = -\,p^2\,\varepsilon^2\,(l^2+n^2)^2 \tag{101}$$

Os casos de degenerescência tratados em 9 assumem as posições particulares:

1.ª Hipótese $\varepsilon = 0$:

a) $p \neq \infty$

$$x^2 + y^2 = 0$$

origem das coordenadas.

2.ª Hipótese $p=0$:

A cónica degenera nas duas rectas (79) que assumem os valores particulares:

$$[(l^2-n^2)-l^2\varepsilon^2]\,y-[ln\,\varepsilon^2-(l^2-n^2)\sqrt{\varepsilon^2-1}]\,x=0 \qquad (102)$$

$$[(l^2-n^2)-l^2\varepsilon^2]\,y-[ln\,\varepsilon^2-(l^2-n^2)\sqrt{\varepsilon^2-1}]\,x=0$$

a) $0 \leqslant \varepsilon < 1$:

as duas rectas (102) tornam-se imaginárias cruzando-se na origem, ponto de degenerescência das cónicas género elipse.

b) $\varepsilon = 1$:

as duas rectas coincidem com a recta única:

$$ny-lx=0 \qquad (103)$$

que passa pela origem, e se torna a degenerescência da parábola;

c) $\varepsilon > 1$:

as duas rectas (102), degenerescência das cónicas do género hipérbole, são reais e concorrentes na origem.

10.2 — Directriz paralela ao eixo OY e foco qualquer

Este caso particular implica que seja $n=1$ e $l=0$ ou seja, para equação da directriz:

$$x+p=0$$

pelo que a equação focal (5) se reduz a:

$$(1-\varepsilon^2)x^2+y^2-2(x_f+p\varepsilon^2)x-2y_f y+(x_f^2+y_f^2-p^2\varepsilon^2)=0 \qquad (104)$$

podendo tomar a forma:

$$\frac{\left[x-\dfrac{x_f+p\,\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right]^2}{\left[\dfrac{\varepsilon\,|x_f+p|}{|1-\varepsilon^2|}\right]^2}\pm\frac{(y-y_f)^2}{\left[\dfrac{\varepsilon\,|x_f+p|}{\sqrt{|1-\varepsilon^2|}}\right]^2}=1 \qquad (105)$$

na qual estão postas em evidência as coordenadas do centro (19) das cónicas centradas:

$$x_0=\frac{x_f+p\,\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \qquad y_0=y_f \qquad (106)$$

e os semi-eixos transverso (58) e conjugado (57):

$$t=\frac{\varepsilon\,|x_f+p|}{|1-\varepsilon^2|}\;;\;q=\frac{\varepsilon\,|x_f+p|}{\sqrt{|1-\varepsilon^2|}} \qquad (107)$$

correspondendo o sinal positivo às cónicas do género elipse e o sinal negativo às cónicas do género hipérbole.

Para as cónicas do género parábola a equação focal (5) ou (104) reduz-se a:

$$y^2-2(x_f+p)x-2y_f y+(x_f^2+y_f^2-p^2)=0$$

ou (108)

$$(y-y_f)^2-2(x_f+p)x+(x_f^2-p^2)=0$$

função unívoca em relação à variável x.

No caso particular da circunferência, a equação focal (105) reduz-se, atendendo a (16), a:

$$(x-x_f)^2+(y-y_f)^2=R^2 \qquad (109)$$

A equação às direcções assimptóticas (9) reduz-se a:

$$m^2+(1-\varepsilon^2)=0 \qquad (110)$$

cuja resolução conduz a:

$$m_{1,2}=\pm\sqrt{\varepsilon^2-1} \qquad (111)$$

valores reais e distintos para as cónicas do género hipérbole e nulo para as cónicas do género parábola.

As coordenadas do segundo foco (25) serão dadas por:

$$x_{f'}=\frac{(1+\varepsilon^2)\,x_f+2\,p\,\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \qquad y_{f'}=y_f \qquad (112)$$

e a equação da segunda directriz (31), por:

$$x-\frac{2\,x_f+(1+\varepsilon^2)\,p}{1-\varepsilon^2}=0 \qquad (113)$$

relativamente às cónicas centradas, tornando-se elementos impróprios para a parábola.

A semi-distância focal (27) toma a forma:

$$f=\frac{\varepsilon^2\,|x_f+p|}{|1-\varepsilon^2|} \qquad (114)$$

e a distância entre as directrizes (32), a forma:

$$\delta=\frac{2\,|x_f+p|}{|1-\varepsilon^2|} \qquad (115)$$

A equação às direcções conjugadas (39) reduz-se a:

$$mm'+(1-\varepsilon^2)=0 \qquad (116)$$

e a equação do diâmetro conjugado (37) com a direcção m, assume o aspecto:

$$y - y_f = \frac{\varepsilon^2 - 1}{m} \left(x - \frac{x_f + p\,\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right) \qquad (117)$$

para as cónicas centradas, no qual foi posto em evidência a sua passagem obrigatória pelo centro (106). Este diâmetro torna-se numa recta paralela ao eixo OX:

$$y = \frac{x_f + p}{m} + y_f \qquad (118)$$

para as parábolas.

Os eixos conjugado (46) e transverso (47) serão dados, respectivamente, por:

$$x = \frac{x_f + p\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \quad ; \quad y = y_f \qquad (119)$$

sendo paralelos aos eixos coordenados.

As equações das assímptotas (50), reduzem-se a:

$$y - y_f = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,(x - x_f) \pm \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}(x_f + p) \qquad (120)$$

As coordenadas dos quatro vértices (51) a (54) das cónicas centradas assumem os valores:

$$x_1 = x_2 = \frac{x_f + p\,\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \qquad y_1 = y_f - \frac{\varepsilon\,(x_f + p)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

$$y_2 = y_f + \frac{\varepsilon\,(x_f + p)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \qquad x_3 = \frac{x_f + p\,\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

$$x = \frac{x_f - p\,\varepsilon}{1 + \varepsilon} \qquad y_3 = y_4 = y_f \qquad (121)$$

o único vértice próprio da parábola é o V_4 (55) de coordenadas:

$$x_4 = \frac{x_f - p}{2} \; ; \quad y_4 = y_f \qquad (122)$$

Os invariantes (73) a (75) reduzem-se a:

$$I_1 = 2 - \varepsilon^2 \qquad I_2 = \varepsilon^2 - 1 \qquad I_3 = -\,\varepsilon^2 (x_f + p)^2 \qquad (123)$$

Dos casos de degenerescência merecem referência especial o da hipótese de $x_f + p = 0$ que conduz às duas rectas seguintes:

$$y - y_f = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\;(x - x_f) \qquad (124)$$

reais e concorrentes no foco para as hipérboles, reais e coincidentes, $y = y_f$, para as parábolas, e imaginárias concorrentes no foco (degenerescência) para as elipses.

10.3 — Directriz paralela ao eixo OY e foco na origem

Este caso particular obtém-se do tratado em 10.2 fazendo-se $x_f = y_f = 0$, e pode considerar-se como um dos que conduz a expressões mais simples.

Assim, ter-se-á, para equação focal (104) da cónica:

$$(1 - \varepsilon^2)\,x^2 + y^2 - 2\,p\,\varepsilon^2\,x - p^2\,\varepsilon^2 = 0 \qquad (125)$$

que pode tomar a forma:

$$\frac{\left[x - \dfrac{p\,\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right]^2}{\left[\dfrac{\varepsilon\,|p|}{|1 - \varepsilon^2|} \right]^2} \pm \frac{y^2}{\left[\dfrac{\varepsilon\,|p|}{\sqrt{|1 - \varepsilon^2|}} \right]^2} = 1 \qquad (126)$$

na qual se evidencia a abcissa do centro (106) das cónicas centradas, existente no eixo OX:

$$x_0 = \frac{p\,\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \qquad (127)$$

e os valores (107) dos semi-eixos transverso e conjugado, respectivamente:

$$t = \frac{\varepsilon\,|p|}{|1 - \varepsilon^2|} \; ; \; q = \frac{\varepsilon\,|p|}{\sqrt{|1 - \varepsilon^2|}} \qquad (128)$$

Para as parábolas a equação focal (108) reduz-se a:

$$y^2 - 2\,px - p^2 = 0 \qquad (129)$$

e para a circunferência, atendendo a (109), a

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (130)$$

A equação às direcções assimptóticas (110) mantém-se; as coordenadas do segundo foco, serão:

$$x_{f'} = \frac{2\,p\,\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \qquad y_{f'} = 0 \qquad (131)$$

e a equação da segunda directriz (113), será:

$$x - \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\,p = 0 \qquad (132)$$

para as cónicas centradas, e elementos impróprios para a parábola.

A semi-distância focal (114) e a distância entre as directrizes (115) tomam a forma:

$$f = \frac{\varepsilon^2\,|p|}{1 - \varepsilon^2} \qquad \delta = \frac{2\,|p|}{1 - \varepsilon^2} \qquad (133)$$

A equação às direcções conjugadas (116) mantém-se e a equação do diâmetro conjugado (117) com a direcção m, reduz-se a:

$$y - y_f = \frac{\varepsilon^2 - 1}{m} x + \frac{p\,\varepsilon^2}{m} \qquad (134)$$

para as cónicas centradas, e à recta (118) paralela ao eixo OX:

$$y = \frac{p}{m} + y_f \qquad (135)$$

para as parábolas.

O eixo conjugado (46) das cónicas centradas, paralelo ao eixo OY, é dado por:

$$x = \frac{p\,\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \qquad (136)$$

sendo o eixo transverso, para todas as cónicas, o eixo OX.

As equações das assímptotas (120) reduzem-se a:

$$y = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\; x \pm \frac{\varepsilon^2 p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \qquad (137)$$

As coordenadas dos quatro vértices (121) das cónicas centradas, assumem os valores:

$$x_1 = x_2 = \frac{p\,\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \qquad y_1 = -y_2 = -\frac{\varepsilon\, p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

$$x_3 = \frac{p\,\varepsilon}{1 - \varepsilon} \qquad x_4 = -\frac{p\,\varepsilon}{1 + \varepsilon} \qquad y_3 = y_4 = 0 \qquad (138)$$

o único vértice próprio da parábola é o V_4 (122) de coordenadas:

$$x_4 = -\frac{p}{2} \qquad y_4 = 0 \qquad (139)$$

Os invariantes (123) serão dados por:

$$I_1 = 2 - \varepsilon^2 \qquad I_2 = \varepsilon^2 - 1 \qquad I_3 = -\varepsilon^2 p^2 \qquad (140)$$

O caso de degenerescência tratado em 10.2, único que merece referência especial, $p = 0$, conduz às duas rectas:

$$y = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\; x \qquad (141)$$

que são reais e concorrentes na origem (foco) para as hipérboles, reais e coincidentes com o eixo OX para as parábolas e imaginárias concorrentes na origem (degenerescência) para as elipses.

10.4 — Directriz paralela ao eixo OY e centro na origem

Este caso particular, um dos mais vulgares no estudo das cónicas obriga a que as coordenadas do foco F gerador sejam:

$$x_f = -p\,\varepsilon^2 \qquad y_f = 0 \qquad (142)$$

para que se anulem as coordenadas (106) do centro.

A consideração de (142) em (104) e (105), caso particular tratado em 10.2 e do qual este se pode considerar um caso particular, permite escrever a equação focal da seguinte forma:

$$(1 - \varepsilon^2)\, x^2 + y^2 - p^2 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2) = 0 \qquad (143)$$

ou, ainda:

$$\frac{x^2}{|\varepsilon\, p|^2} - \frac{y^2}{\left[\varepsilon\, |p| \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right]^2} = 1 \qquad (144)$$

sendo, portanto, os semi-eixos (107) transverso e conjugado, dados por:

$$t = \varepsilon\, |p| \;; \qquad q = \varepsilon\, |p| \sqrt{1 - \varepsilon^2} \qquad (145)$$

As cónicas do género parábola, por serem desprovidas de centro, não têm definição própria neste caso particular, dada a impossibilidade daquele ponto ser a origem das coordenadas.

A equação da circunferência (109) toma a forma (130).

A equação às direcções assimptóticas (110) mantém-se. O segundo foco (112) passa a ter as coordenadas:

$$x_{f'} = -x_f = p\,\varepsilon^2 \qquad y_{f'} = 0 \qquad (146)$$

e a segunda directriz, a equação:

$$x - p = 0 \qquad (147)$$

A semi-distância focal (114) será dada por:

$$f = \varepsilon^2 |p| \qquad (148)$$

e a distância entre as directrizes, por:

$$\delta = 2\,|p| \qquad (149)$$

A equação às direcções conjugadas (116) mantém-se, e a equação do diâmetro conjugado (117) com a direcção m, passa a ser:

$$y = \frac{\varepsilon^2 - 1}{m} x \qquad (150)$$

Os eixos (119) conjugado e transverso coincidem, respectivamente, com os eixos coordenados OY e OX.

As equações das assímptotas (120) reduzem-se a:

$$y = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\ x \qquad (151)$$

ou sejam, duas rectas concorrentes na origem e simétricas em relação aos eixos coordenados.

As coordenadas dos quatro vértices (121) das cónicas centradas, assumem os valores:

$$x_1 = x_2 = 0 \qquad y_1 = -y_2 = p\,\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}$$
$$x_3 = -x_4 = p\,\varepsilon \qquad y_3 = y_4 = 0 \qquad (152)$$

Dos invariantes indicados em (123) apenas é diferente o terceiro, dado por:

$$I_3 = -p^2\,\varepsilon^2\,(1-\varepsilon^2)^2 \qquad (153)$$

O caso de degenerescência tratado em 10.2 reduz-se aqui às duas assímptotas indicadas em (151), reais e distintas para as hipérboles e imaginárias e concorrentes na origem para as elipses.

10.5 — Directriz no eixo OY e foco qualquer

Este caso particular poderá ser analisado considerando em 10.2, $p=0$. Assim as equações focais (104) e (105) reduzem-se a:

$$(1-\varepsilon^2)\,x^2 + y^2 - 2\,x_f\,x - 2\,y_f\,y + (x_f^2 + y_f^2) = 0 \qquad (154)$$

e, a:

$$\frac{\left[x - \dfrac{x_f}{1-\varepsilon^2}\right]^2}{\left[\dfrac{\varepsilon\,|x_f|}{|1-\varepsilon^2|}\right]^2} \pm \frac{[y-y_f]^2}{\left[\dfrac{\varepsilon\,|x_f|}{\sqrt{|1-\varepsilon^2|}}\right]^2} = 1 \qquad (155)$$

estando, nesta, postas em evidência as coordenadas do centro (106) das cónicas centradas:

$$x_0 = \frac{x_f}{1-\varepsilon^2} \qquad y_0 = y_f \qquad (156)$$

e os semi-eixos (107) transverso e conjugado:

$$t = \frac{\varepsilon\,|x_f|}{|1-\varepsilon^2|}\ ;\ q = \frac{\varepsilon\,|x_f|}{\sqrt{|1-\varepsilon^2|}} \qquad (157)$$

Para as cónicas do género parábola, a equação focal (154) reduz-se a:

$$y^2 - 2x_f\,x - 2y_f\,y + (x_f^2 + y_f^2) = 0 \qquad (158)$$

ou:

$$(y-y_f)^2 - 2x_f\,x + x_f^2 = 0$$

No caso particular da circunferência, a equação focal (154) degenera na expressão (76) reduzindo-se ao foco.

A equação às direcções assimptóticas mantém a forma (110).

As coordenadas do segundo foco (112) tomam os valores:

$$x_{f'} = \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,x_f \qquad y_{f'} = y_f \qquad (159)$$

e a equação da segunda directriz (113), a forma:

$$x - \frac{2}{1-\varepsilon^2}\,x_f = 0 \qquad (160)$$

para as cónicas centradas, tornando-se elementos impróprios para as parábolas.

A semi-distância focal (114) e a distância entre as directrizes (115) serão dadas por:

$$f = \frac{\varepsilon^2\,|x_f|}{|1-\varepsilon^2|}\ ;\ \delta = \frac{2\,|x_f|}{|1-\varepsilon^2|} \qquad (161)$$

A equação às direcções conjugadas (116) mantém-se e a equação do diâmetro conjugado (117) com a direcção m, será dada por:

$$y - y_f = \frac{\varepsilon^2 - 1}{m}\left(x - \frac{x_f}{1-\varepsilon^2}\right) \qquad (162)$$

para as cónicas centradas, e por:

$$y = \frac{x_f}{m} + y_f \qquad (163)$$

para as cónicas do género parábola.

O eixo conjugado (119) assume o valor:

$$x = \frac{x_f}{1-\varepsilon^2} \qquad (164)$$

mantendo-se o eixo transverso (119).

As equações das assímptotas (120) reduzem-se a:

$$y - y_f = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\ x \pm \frac{x_f}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \qquad (165)$$

As coordenadas dos quatro vértices (121) assumem os valores:

$$x_1 = x_2 = \frac{x_f}{1-\varepsilon^2} \qquad y_1 = y_f - \frac{\varepsilon\,x_f}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$
$$y_2 = y_f + \frac{\varepsilon\,x_f}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \qquad x_3 = \frac{x_f}{1-\varepsilon} \qquad (166)$$
$$x_4 = \frac{x_f}{1+\varepsilon} \qquad y_3 = y_4 = y_f$$

o único vértice próprio da parábola é o V_4 (122) de coordenadas:

$$x_4 = \frac{x_f}{2} \qquad y_4 = y_f \tag{167}$$

Os invariantes (123) I_1 e I_2 mantêm-se e o invariante I_3 toma a forma:

$$I_3 = -\varepsilon^2 x_f^2 \tag{168}$$

O caso de degenerescência (124) mantém-se.

10.6 — Directriz no eixo OY e foco no eixo OX

Este caso particular pode obter-se do anterior fazendo $y_f = 0$. Assim, as equações focais (154) e (155) reduzem-se a:

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2x_f + x_f^2 = 0 \tag{169}$$

e a:

$$\frac{\left[x - \dfrac{x_f}{1-\varepsilon^2}\right]^2}{\left[\dfrac{\varepsilon\,|x_f|}{|1-\varepsilon^2|}\right]^2} \pm \frac{y^2}{\left[\dfrac{\varepsilon\,|x_f|}{\sqrt{|1-\varepsilon^2|}}\right]^2} = 1 \tag{170}$$

sendo as coordenadas do centro (156) das cónicas centradas dadas por:

$$x_0 = \frac{x_f}{1-\varepsilon^2} \qquad y_0 = 0 \tag{171}$$

e os semi-eixos transverso e conjugado dados por (157).

Para as cónicas do género parábola, a equação focal (158) reduz-se a:

$$y^2 - 2x_f x + x_f^2 = 0 \tag{172}$$

Para o caso de $\varepsilon = 0$, circunferência, a equação focal (169) degenera em:

$$(x - x_f)^2 + y^2 = 0 \tag{173}$$

reduzindo-se ao foco.

A equação às direcções assimptóticas mantém a forma (110).

A ordenada do segundo foco (159) anula-se, mantendo-se a sua abcissa e também a equação da segunda directriz (160); estes elementos, foco e directriz, tornam-se impróprios para as parábolas.

Mantêm-se a semi-distância focal, a distância entre as directrizes (161) e a equação às direcções conjugadas (116), sendo a equação do diâmetro conjugado (162) com a direcção m, dada por:

$$y = \frac{\varepsilon^2 - 1}{m}\left(x - \frac{x_f}{1-\varepsilon^2}\right) \tag{174}$$

para as cónicas centradas, e por:

$$y = \frac{x_f}{m} \tag{175}$$

para as cónicas do género parábola.

O eixo conjugado (164) mantém-se e o transverso passa a coincidir com o eixo OX.

As equações das assímptotas (165) reduzem-se a:

$$y = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\; x \pm \frac{x_f}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \tag{176}$$

As coordenadas dos quatro vértices (166) e (167) mantêm-se com excepção das ordenadas y_3 e y_4 que se anulam.

Os invariantes I_1 e I_2 dados por (123) e I_3 dado por (168) mantêm-se.

Além do caso de degenerescência dado por (173), merece referência o que corresponde a $x_f = 0$, e que conduz às duas rectas:

$$y = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\; x \tag{177}$$

reais e concorrentes na origem para as hipérboles, reais e coincidentes com o eixo OX para as parábolas e imaginárias e concorrentes na origem (degenerescência) para as elipses.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 439

Ano LII – Março 1977

C. D. U. 530.12:513.75/.77

M. ABREU FARO

CARTAS DE TRANSFORMAÇÃO EM RELATIVIDADE RESTRITA

Técnica N.º 439 — LII — 3-1977, p. 369 a 381

Este é o último de uma série de três artigos sobre a Transformação de Lorentz publicados na «Técnica».

No primeiro apresentou-se um método geométrico de obter a referida Transformação. No segundo procedeu-se ao estabelecimento e interpretação física da Transformação de Lorentz a partir dos conceitos de velocidade relativa e dessincronização relativa.

Neste último artigo e na base dos resultados apresentados nos dois primeiros, procede-se ao estabelecimento de cartas de transformação que permitem uma transcrição imediata da cinemática observada num dado referencial para aquela que lhe corresponde e tal como se observa noutro referencial de inércia.

Ver-se-á que a partir daí é possível introduzir um critério de ordenação de acontecimentos no espaço-tempo dos dois referenciais em termos tais que esses ordenamentos se conservam na Transformação de Lorentz.

C. D. U. 624.07[012.4]2

J. M. MADEIRA COSTA

BETÃO NORMAL REFORÇADO COM ARMADURA METÁLICA

Técnica N.º 439 — LII — 3-1977, p. 383 a 398

Neste estudo apresenta-se uma visão geral, mas integrada, do dimensionamento de secções à flexão, abordando sucessivamente: — o domínio de acção do material; estudo da fissuração; fórmulas gerais de dimensionamento por tensões de segurança; comportamento dinâmico; definição da relação conveniente entre a armadura passiva e a armadura activa; análise da deformação, definição de secção económica, análise da situação de rotura; considerações finais.

C. D. U. 621.374.33

L. T. MAGALHÃES
M. P. O. RICOU

Técnica N.º 439 — LII — 3-1977, p. 399 a 406

ALGORITMO PARA OBTER UMA MÁQUINA SEQUENCIAL FINITA ESPECIFICADA POR EXPRESSÕES REGULARES

Neste artigo são apresentados e demonstrados algoritmos para máquinas de Mealy e de Moore com qualquer número de terminais de saída e qualquer número de símbolos em cada terminal. Os algoritmos utilizam a igualdade de expressões regulares ou a semelhança de expressões regulares.

C. D. U. 621.50:621-514:621-519.621-52.621.311.2:621.316.72

JOSÉ LUIS DE OLIVEIRA PAULO

CONTROLO DE ENERGIA NUMA CENTRAL HIDRO-ELÉCTRICA

Técnica N.º 439 — LII — 3-1977, p. 407 a 425

Este artigo, baseado num relatório de estágio feito na central hidroeléctrica de Sisteron, no sul de França, descreve sucintamente os sistemas de controlo de energia neste aproveitamento. Primeiramente é feita uma descrição geral do aproveitamento hidroeléctrico de Curbans/Sisteron. Após uma série de considerações teóricas sobre controlo de energia, referem-se as cadeias e os órgãos de controlo da central de Sisteron.

C. D. U. 624.131.531.6

ANTÓNIO RESSANO GARCIA LAMAS

A INFLUÊNCIA DO PESO PRÓPRIO NA ESTABILIDADE DE COLUNAS EM «CONSOLA»

Técnica N.º 439 — LII — 3-1977, p. 427 a 437

Neste artigo o problema do varejamento de colunas em «consola», considerando a acção do peso próprio, é revisto e apresentado de forma actualizada e conveniente para tratamento numérico. Neste trabalho houve a intenção de chamar a atenção de estudantes que iniciam o estudo de problemas de estabilidade de estruturas reticuladas, para a utilidade da equação dos Trabalhos Virtuais numa forma não linear, servindo a coluna como exemplo da sua aplicação a este tipo de estruturas.

As equações gerais são deduzidas e aplicadas à resolução do problema do varejamento de dois tipos de coluna: a de secção uniforme e a de secção circular de parede fina e raio uniformemente variável.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.° 439

LII — March 1977

C. D. U. 621.50:621-514:621-519:621-52:621.311.2:621.316.72

JOSÉ LUIS DE OLIVEIRA PAULO

CONTRÔLE DES SYSTÈMES D'ÉNERGIE DANS UN ENSEMBLE HYDRO-ÉLECTRIQUE

Técnica N.° 439 — LII — 3-1977, p. 407 a 425

This paper, reprinted from a trainee report done in the hydro powerstation of Sisteron, in the south of France, shortly describes the power control systems in that powerstation. First a general description of Curbans/Sisteron plant is presented. They are introduced several theorical considerations about powercontrol and at last the main regulating circuit elements are described.

C. D. U. 530.12:513.75/.77

M. ABREU FARO

TRANSFORMATION CHARTS IN SPECIAL RELATIVITY

Técnica N.° 439 — LII — 3-1977, p. 369 a 381

This is the last of a series of three articles on the Lorentz Transformation, published in «Técnica».

In the first article, a geometric method to determine this Transformation was presented. In the second, and on the basis of the concepts of relative velocity and relative desynchronization, the Lorentz Transformation was physically established and interpreted.

In the last article, and upon the results presented in the first two, transformation charts are established which allow an immediate transcription from the kinematics observed in a given inertial frame of reference to the one which corresponds to it and exactly as it can be observed in another frame.

It will be seen that, henceforth, it will be possible to introduce a criterium for ordering the events occuring in the space-time of the two frames such that this order is maintained in the Lorentz Transformation

C. D. U. 624.131.531.6

ANTÓNIO RESSANO GARCIA LAMAS

THE INFLUENCE OF SELF-WEIGHT IN THE STABILITY OF CANTILEVER COLUMNS

Técnica N.° 439 — LII — 3-1977, p. 427 a 437

The problem of buckling of cantilever columns considering self-weight loading is revised and presented in an up-dated approach suitable for numerical solutions. Emphasis is given to the advantageous use of a non-linear Virtual Work Equation for frame stability problems; the column treated as an example of its application serving as an opportunity to call the attention of students to such usefulness.

Basic equations are derived and applied to the solution of particular types of columns: the constant cross-section and the uniformly tapered thin-walled circular cross-section

C. D. U. 624.07[012.4]2

J. M. MADEIRA COSTA

NORMAL CONCRETE REINFORCED WITH STEEL

Técnica N.° 439 — LII — 3-1977, p. 383 a 398

This paper is dealing with a general study of reinforced concrete (Classe IV), prestressed concrete (Classe I), and reinforced concrete with prestressing tendons (Classe III), regarding members sustaining both bending and direct axial load.

C. D. U. 621.374.33

L. T. MAGALHÃES
M. P. O. RICOU

ALGORITHM FOR THE DETERMINATION OF A FINITE SEQUENTIAL MACHINE SPECIFIED BY REGULAR EXPRESSIONS

Técnica N.° 439 — LII — 3-1977, p. 399 a 406

In this paper we state and prove algorithms for Mealy and Moore machines with any number of output terminals and any number of output symbols at each of the output terminals. The algorithms use equality or similarity of regular expressions.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 439

Ano LII — Março 1977

C. D. U. 621.374.33

JOSÉ ALBERTO BAPTISTA TOME

NÚMERO E COMPRIMENTO DE CICLOS NO ESPAÇO DE ESTADOS DE UM REGISTO GERAL DE DESLOCAMENTO

Técnica N.º 439 — LII — 3-1977, p. 439 a 443

É estabelecida a equivalência entre um registo geral de deslocamento e um registo de deslocamento, directo ou invertido. Para estes são deduzidos os possíveis ciclos e fórmulas iterativas que permitem calcular o número de ciclos com determinado comprimento.

C. D. U. 513.51 | 55.513.517

F. PERES RODRIGUES

CÓNICAS. ESTUDO DAS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS A PARTIR DA SUA EQUAÇÃO FOCAL

Técnica N.º 439 — LII — 3-1977, p. 445 a 460

Analisa-se neste estudo a partir da equação focal das cónicas, deduzida com base num foco e numa directriz genéricos, as suas principais características:

Género, direcções assimptóticas e assimptotas, centro, directrizes, focos e distância focal, direcções e diâmetros conjugados, eixos e semi-eixos, vértices, invariantes e degenerescências, pondo em destaque a influência da excentricidade.

Por último, analisam-se estas características para algumas posições particulares do foco e da directriz.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 439

LII – March 1977

C. D. U. 513.51 55 513 517

F. PERES RODRIGUES

CONICS MAIN CARACTERISTICS FROM THEIR FOCAL EQUATION

Tecnica N. 439 — LII — 3-1977, p. 445 a 460

From the focal equation of the conics, which is obtained from a generical focus and a generical directrix, their main characteristics are analysed.

Type, asymptotic directions and asymptotes, centre, directrixes, focuses and focal distance, conjugate directions and diametres, axes and semi-axes, vertexes, invariants and degeneration, the influence of the eccentricity being emphasized.

Finally, these characteristics are studied for some particular positions of the focus and the directrix.

C. D. U. 621.374.33

JOSÉ ALBERTO BAPTISTA TOMÉ

NUMBER AND LENGTH OF CYCLES OF A GENERAL SHIFT-REGISTER

Tecnica N. 439 — LII — 3-1977, p. 439 a 443

Equivalences between generalized shift-register and direct feedback or twisted shift-registers are established. For a given shift-register length, the possible cycle lengths and number of cycles are established by means of an iterative formula.

Publicações Recebidas

PUBLICAÇÕES PERIÓDICAS

— AGROS
Associação dos Estudantes de Agronomia

— ANALLES DE MECANICA Y ELECTRICIDAD
Asociacion de Ingenieros del I. C. A. I.

— ASEA — REVUE

— ACTA TECHNICA
Academiae Scientiarum Hungariae

— ANAIS DO CLUBE MILITAR NAVAL

— ANALYTICAL ABSTRACTS
Society for Analytical Chemistry

— ACIER - STAHL - STELL

— ANNALES
Institut Technique du Batiment et des Travaux Public

— AEG - TELEFUNKEN AL DIA

— AR COMPRIMIDO
Atlas Copco

— BOLETIM DA CAMARA MUNICIPAL DE SA DA BANDEIRA

— BOLETIM ECONÓMICO E FINANCEIRO
Banco Borges & Irmão

— BOLETIM
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM MENSAL DE INFORMAÇÃO
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— BULLETIN OF THE SEISMOGRAPHIC STATIONS
University of California

— BOLETIM DEL CEMENTO PORTLAND
Instituto del Cemento Portland Argentino

— BOLETIM GTH
Gabinete Técnico da Habitação da Câmara Municipal de Lisboa

— BOLETIM
Sociedade Geológica de Portugal

— BOLETIM INFORMATIVO IRANOR
Instituto Nacional de Racionalizacion y Normalizacion

— BOLETIM DA ELECTROQUÍMICA E CORROSÃO
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM
Departamento de Imprensa e Informação do Governo da República Federal da Alemanha

— BOLETINUL
Institutului Politehnic Bucaresti

— BOLETIM
Associação Industrial de Angola

— BOLETIM DO PORTO DE LISBOA
Administração-Geral do Porto de Lisboa

— BOLETIM DO SERVIÇO CARTOGRÁFICO DO EXÉRCITO

— BOLETIM DE MINAS
Direcção-Geral de Minas e Serviços Geológicos

— BULLETIN DE LA CHAMBRE DE COMMERCE BELGE AU PORTUGAL

— BULLETIN
Agence Internationale de L'energie Atomique

— CENIM
Centro Nacional de Investigaciones Metalurgicas

— CORTIÇA
Instituto dos Produtos Florestais

— (JOURNAL OF) CHEMICAL EDUCATION
Division of Chemical Education of the American Chemical Society

— CIMENTO E CONCRETO
Associação Brasileira de Cimento Portland

— COMUNICAÇÕES ELÉCTRICAS
International Telephone and Telegraph Corporation

— CONSTRUCTI

— CARTA GEOLÓGICA DE ANGOLA
Direcção Provincial dos Serviços de Geologia e Minas

— CEMENTO HORMIGÓN

— COURRIER CERN

— COLLECTION
Czechoslovak Academy of Sciences

— DYNA
Asociacion de Engenieros Industriales de España

— EL ESTAÑO Y SUS APLICACIONES
Tin Research Institute

— ELECERICITE DE FRANCE
Direction des Etudes et Recherches

— ELECTRICIDADE
Empresa Editorial Electrotécnica Edel, Lda.

— ENDEAVOUR
Imperial Chemical Industries Limited

— ESTUDOS
Banco Fomento Nacional

— ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS
Serviço de Fomento Mineiro

— ELECTRICAL COMMUNICATION
International Telephone and Telegraph Corporation

— ECONOMIC REVIEW
Câmara de Comércio Luso-Britânica

— FUNDIÇÃO
Associação Portuguesa de Fundição

— FUNDEXPORT
Fundo de Fomento de Exportação

— GEOTÉCNICA
Revista da Sociedade Portuguesa de Geotécnica

— INFORMES DE LA CONSTRUCCIÓN
Instituto Eduardo Torroja

— ION
Sindicato Nacional de Indústrias Químicas

— INDÚSTRIA DE MOÇAMBIQUE
Associação Industrial de Moçambique

— LA HOUILLE BLANCHE
Société Hydrotechnique de France

— LES NOUVELLES DE L'E. I. B.

— METALLURGIA AND METAL FORMING
National Association of drop Forgers and Stampers

— MACHINE TOOL REVIEW

— NOTICIARIO DOS ELASTÓMEROS
du Pont

— ONU (CHRONIQUE MENSUELLE)
Service de l'Information de l'Organization des Nations Unies

— O PROPULSOR
Sindicato Nacional dos Oficiais da Marinha Mercante

— PRELO
Imprensa Nacional - Casa da Moeda

— PORTUGAL - ALEMANHA
Câmara de Comércio e Indústria Luso-Alemã

— REVISTA DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
Universidade de Lourenço Marques

— REVUE LANDIS E GYR (EDITION ELECTRICITÉ

— REVUE D'IENA

— REVUE SIEMENS
Siemens Antiengesellschaft

— REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

— LA REACHERCHE AÉROSPATIALE
Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales

— REVISTA DE METALURGIA
Cenim - Centro Nacional de Investigaciones Metalúrgicas

— RAIL INTERNATIONAL
Association Internationale du congrès des chemins de fer et de L'Union Internationale des Chemins de fer

— REVISTA TÉCNICA SULZER

— REVISTA DANFOSS

— REVISTA AGRONÓMICA
Sociedade de Ciências Agronómicas de Portugal

— TECHNIQUES FRANÇAISES (BATIMENT TRAVAUX PUBLICS URBANISME)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (INDUSTRIE DE METAUX)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (TRANSPORTS)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (CHIMIE GAZ PETROLE BIENS DE CONSOMMATION)
Services Économiques de L'Embassade de France

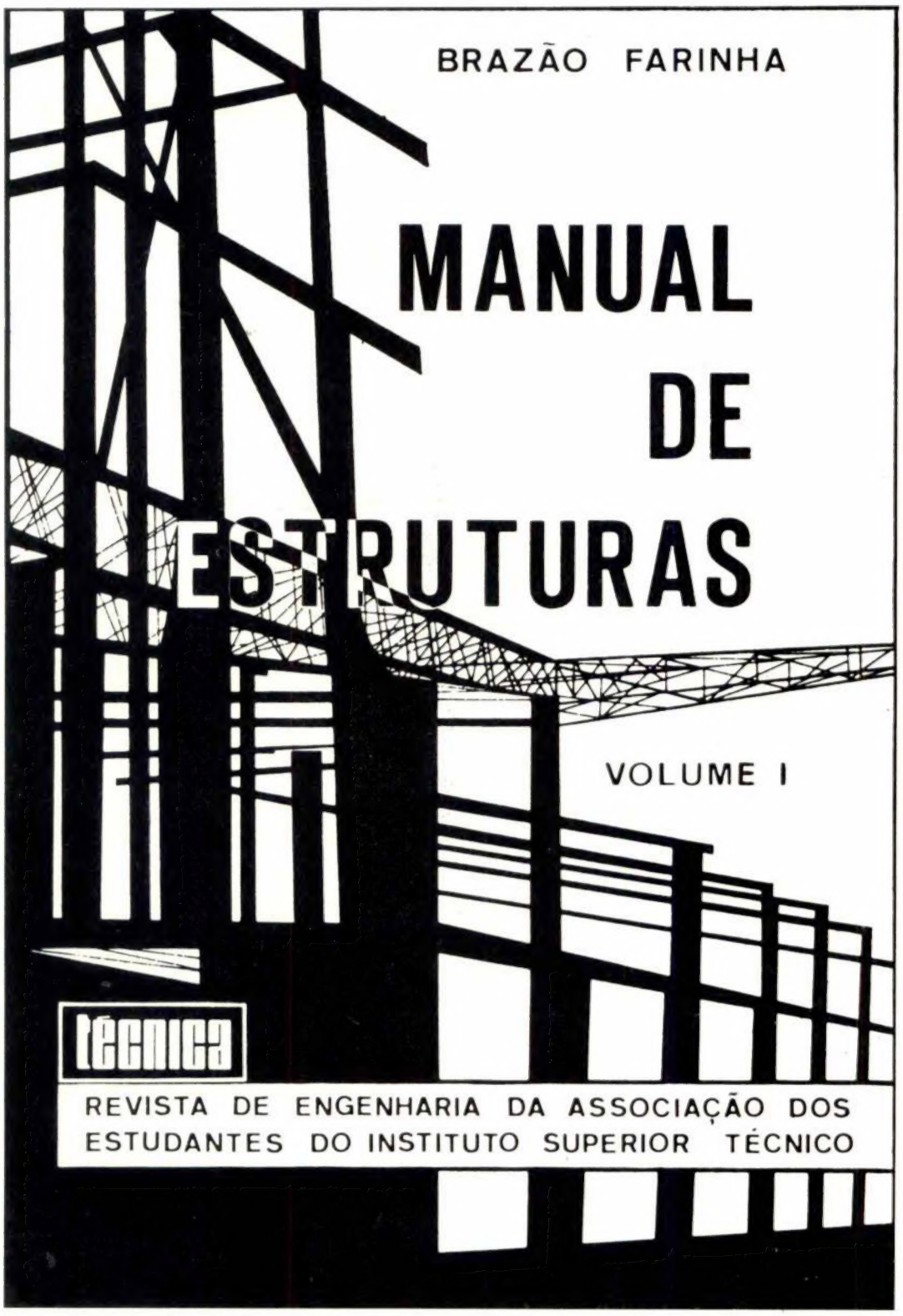
— WORLD HEALTH ORGANIZATION PUBLICATIONS
World Health Organization

— WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER HOCSCHULE
Architektur und Bauwesen Weimar

Publicidade com critério.

Anuncie na

técnica REVISTA DE ENGENHARIA



PREÇOS

ENCADERNADO . . . 625$00

PLASTIFICADO . . . 587$50

DESC. 10°/₀ AOS ASSINANTES